

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta strojní  
Katedra mechaniky

# **Vliv výrobních nepřesností na napět'ový stav prutové konstrukce**

Influence of Manufacturing Imperfection  
on Stress State of Truss Construction

Student: Günther Theisz  
Vedoucí bakalářské práce: Ing. Zdeněk Poruba, Ph.D.

Ostrava 2011

## Zadání bakalářské práce

Student:

**Günther Theisz**

Studijní program:

B2341 Strojírenství

Studijní obor:

3901R003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Vliv výrobních nepřesností na napěťový stav prutové konstrukce  
Influence of Manufacturing Imperfection on Stress State of Truss  
Construction

Zásady pro vypracování:

- 1) Popište způsob využití prutových konstrukcí u strojních součástí a celků, diskutujte možný vliv výrobních a provozních nepřesností u těchto konstrukcí,
- 2) Vytvořte konečnoprvkový model poskytnutého testovacího modelu prutové konstrukce s definovanými výrobními nepřesnostmi a proveďte výpočet rozložení napětí pro zadané okrajové podmínky,
- 3) Měňte postupně vytipované rozměry nepřesností a diskutujte vliv jejich změny na rozložení napětí,
- 4) Získané výsledky přehledně zpracujte v závislosti na změně vstupních hodnot nepřesností a vytipujte další možné parametry mající vliv na rozložení napětí.

Seznam doporučené odborné literatury:

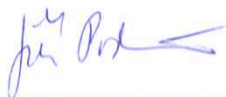
1. ANSYS, Inc. *ANSYS Release 11 Documentation*. SAP IP, Inc., 2007. V elektronické podobě dostupné jako součást instalace programu ANSYS 11.
2. KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. *FEM : Principy a praxe metody konečných prvků*. 1. vyd. Praha : Computer Press, 1997. 401 s. ISBN 80-7226-021-9.
3. COOK, R. D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. 1st edition. New York : Wiley & Sons, 1995. 320 s. ISBN 0-471-10774-3.
4. KUČERA, J. *Stručný úvod do mechaniky lomu. Část I, Vruby a trhliny, nestabilní lom*. 1. vyd. Ostrava : Vysoká škola báňská, 1993. 106 s. ISBN 80-7078-218-8.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Zdeněk Poruba, Ph.D.**

Datum zadání: 17.12.2010

Datum odevzdání: 23.05.2011



doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.  
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě .....  
23.5.2011

.....  
Günther Theisz

podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- беру на ве́домі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на ве́домі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 23. 5. 2011

Günther Theisz

podpis

Jméno a příjmení autora práce: Günther Theisz

Adresa trvalek pobytu autora práce: Sedliště 352

Frýdek – Místek; 739 36

## **ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

THEISZ, G. *Vliv výrobních nepřesností na napěťový stav prutové konstrukce: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra mechaniky, 2011, 50s. Vedoucí práce: Poruba, Z.

Bakalářská práce se zabývá problematikou vlivu výrobních a provozních nepřesností u prutových konstrukcí u strojních součástí a celků. Model prutové konstrukce byl vytvořen v programu Ansys Workbench 13 metodou konečných prvků. Rozměry a okrajové podmínky byly zadány společností Huisman, zabývající se mimo jiné také strojními celky s prutovými konstrukcemi. Právě u těchto konstrukcí vznikají při výrobě nepřesnosti, které mohou zapříčinit změnu chování ideálně rovné konstrukce. Výsledkem práce je grafická závislost koeficientu změny napětí a koeficientu násobitele zatížení na zadané konstrukci při daných výrobních nepřesnostech a při různém zatížení.

## **ANNOTATION OF BACHELOR THESIS**

THEISZ, G. *Influence of Manufacturing Imperfection on Stress State of Truss Construction: Bachelor Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, 2011, 50p. Thesis head: Poruba, Z.

The Bachelor Thesis conversant with problems influence of manufacturing imperfection in truss construction for machinery parts and components. Model truss construction was created by Ansys Workbench 13 with the Finite Element Method. Dimension and frontier property was petting by Huisman company, conversant among others mechanical units with truss construction. Especially in these construction arise imperfection in the production, which may cause a change of behavior ideally straight construction. The result of this thesis is a graphical dependence factor of change stress and the factor of load multiplier on desired construction, manufacturing imperfection and varying loads.

# Obsah

	strana
Seznam použitých značek a symbolů .....	7
Úvod .....	8
1 Prutové konstrukce .....	9
1.1 Základní pojmy u prutových konstrukcí .....	9
1.2 Použití prutových konstrukcí .....	11
2 Problematika modelování .....	12
2.1 Princip metody konečných prvků .....	12
2.2 Odvození základní rovnice MKP pro obecný prvek .....	14
3 Tvorba matematického modelu .....	18
3.1 Inženýrská data .....	18
3.2 Geometrie modelu .....	18
3.3 Volba typu elementu .....	21
3.4 Okrajové podmínky .....	23
3.4.1 Typy okrajových podmínek .....	23
3.4.2 Aplikace okrajových podmínek .....	24
4 Hustota sítě .....	26
4.1 Analýza citlivosti sítě .....	26
5 Numerické řešení jednotlivých variant modelu .....	27
5.1 Koeficient změny napětí .....	30
5.2 Grafy koeficientů změny napětí .....	31
5.2.1 Analýza ve styčnicku 5 při zatížení variantu A .....	31
5.2.2 Analýza ve styčnicku 5 při zatížení variantu B .....	32
5.2.3 Analýza ve styčnicku 7 při zatížení variantu A .....	33
5.2.4 Analýza ve styčnicku 7 při zatížení variantu B .....	34
5.3 Hodnocení vlivu jednotlivých parametrů na průběh napětí .....	35
6 Ztráta stability tvaru .....	35
6.1 Stabilita přímých prutů namáhaných tlakem .....	35
6.1.1 Kontrola stability podle Eulera .....	36
6.1.2 Kontrola stability podle Tetmajera .....	37
6.2 Koeficient změny hodnoty násobitele zatížení .....	38
6.3 Numerické řešení jednotlivých variant modelu .....	38
6.4 Grafy koeficientů změny násobitele zatížení .....	42
6.4.1 Analýza konstrukce při zatížení variantu A .....	42
6.4.2 Analýza konstrukce při zatížení variantu B .....	43
6.4.3 Analýza konstrukce při zatížení variantu C .....	44
6.5 Hodnocení vlivu jednotlivých parametrů na násobitele zatížení .....	45
7 Závěrečné zhodnocení .....	46
8 Seznam použité literatury .....	48
9 Seznam příloh .....	49
10 Poděkování .....	50

## Seznam použitých značek a symbolů

Veličina	Význam	Jednotka
B	Vzdálenost mezi hlavními pruty	[mm]
E	Modul pružnosti materiálu v tahu	[MPa]
$F_a$	Celková zatěžující síla pro analýzu citlivosti sítě	[N]
$F_{cn}$	Celková zatěžující síla pro analýzu změny napětí	[N]
$F_{cv}$	Celková zatěžující síla pro analýzu změny násobitele zatížení	[N]
$F_{kr}$	Kritická síla	[N]
$F_n$	Síla pro analýzu změny napětí působící na jeden styčník	[N]
$F_v$	Síla pro analýzu změny násobitele zatížení působící na jeden styčník	[N]
G	Modul pružnosti materiálu ve smyku	[MPa]
$J_{min}$	Kvadratický moment s nejnižší hodnotou	[mm <sup>4</sup> ]
$L_{red}$	Redukovaná délka	[mm]
MKP	Metoda konečných prvků	[-]
S	Plocha průřezu	[mm <sup>2</sup> ]
TR Ø50x5	Trubka s vnějším průměrem 50mm a tloušťkou stěny 5mm	[mm]
TR Ø100x10	Trubka s vnějším průměrem 100mm a tloušťkou stěny 10mm	[mm]
a, b	Materiálové konstanty	[MPa]
f	Výrobní nepřesnost	[mm]
$k_{LM}$	Násobitel zatížení	[-]
$k_n$	Koeficient změny napětí	[-]
$k_v$	Koeficient změny násobitele zatížení	[-]
$\beta$	Koeficient	[-]
$\lambda$	Štíhlost	[-]
$\lambda_m$	Mezní štíhlost	[-]
$\mu$	Poissonovo číslo	[-]
$\rho_{ocel}$	Hustota oceli	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\sigma_{kr}$	Kritické napětí	[MPa]
$\sigma_u$	Mez úměrnosti	[MPa]

## Úvod

Předmětem bakalářské práce je zjistit možný vliv výrobních a provozních nepřesností prutových konstrukcí u strojních součástí a celků v závislosti na jejich velikosti a způsobu zatížení. Analýza bude prováděna u prutové konstrukce vytvořené v programu Ansys Workbench 13. Rozměry konstrukce a způsob zatížení je definován firmou Huisman. Zkoumána bude změna velikosti napětí a změna násobitele zatížení v závislosti na výrobních nepřesnostech  $f$  a délce  $L$  (obr. 3.2.2).

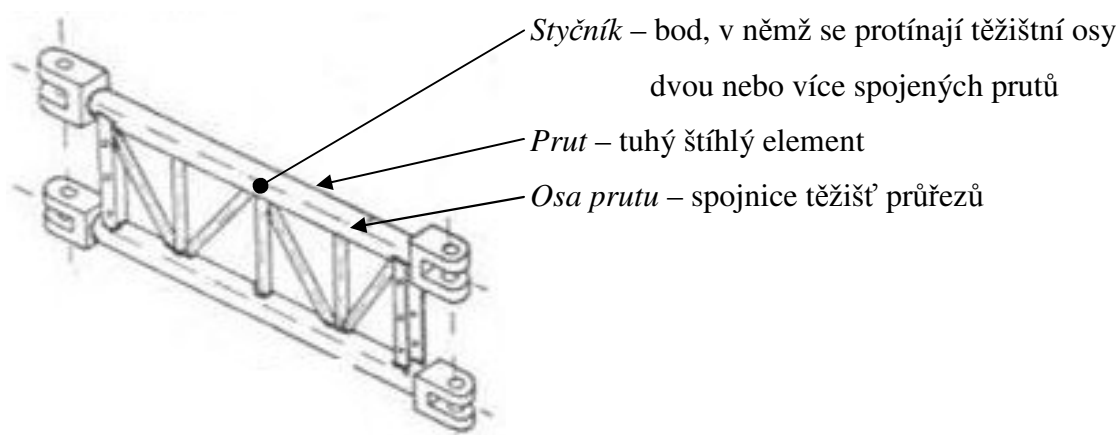
Při výrobě prutových konstrukcí vznikají nepřesnosti, které mohou zapříčinit změnu chování ideálně rovné konstrukce. Zanedbáním těchto nepřesností může nastat situace, kdy dojde k snížení únosnosti celé konstrukce.

Výsledkem práce je grafická závislost koeficientu změny napětí a koeficientu změny násobitele zatížení na zadané konstrukci při daných výrobních nepřesnostech a při různém zatížení. Daný koeficient představuje míru kolikrát je hodnota napětí nebo násobitele zatížení v daném styčnicku vyšší/nížší než hodnota u ideálně rovné prutové konstrukce.



# 1 Prutové konstrukce

## 1.1 Základní pojmy u prutových konstrukcí



Obr. 1.1.1 – Popis rovinné prutové konstrukce [1]

### Definice prutové konstrukce

Obecná prutová konstrukce je definována jako celek sestavený z prutů vzájemně spojených na svých koncích ve styčnících. Prutové konstrukce mívají průřez různého tvaru (kruhový, trubkový, hranoly, profily...) konstantní po celé délce. [1]

### Idealizace prutové konstrukce [1]

Ideální prutová konstrukce má následující vlastnosti:

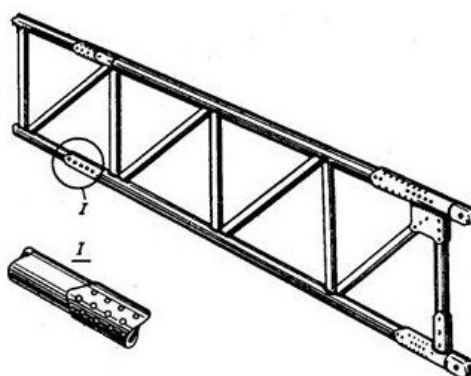
- pruty jsou připojeny do styčníků kloubově
- vnější zatěžující síly a reakce jsou zavedeny do styčníků
- osově zatížení prutů je po celé jejich délce konstantní a napětí v prutech rovnoměrně rozloženo po celém průřezu

Reálná prutová konstrukce se liší hlavně styčnicky, které bývají tuhé (svařované, lepené, nýťované apod.). Liší se také zatěžováním, které může být po celé délce prutů (vlastní tíha), což vede k ohybu prutů.

V praxi je dokázáno, že odchylky změřených napětí v jednotlivých elementech tuhých prutových konstrukcí se od vypočteného teoretického ideálu příliš neliší, alespoň v rozsahu dolní a střední oblasti dovoleného zatížení. Větší rozdíl vypočteného napětí na teoretickém modelu a reálné prutové konstrukci bývá způsoben pružnou deformací zatížených prutů, které významněji změni původní geometrii nezatížené konstrukce a vyvolá, díky tuhým styčnickým, vedle osových zatížení i parazitní zatížení ohybem.

### Výhody a nevýhody tuhých styčníků

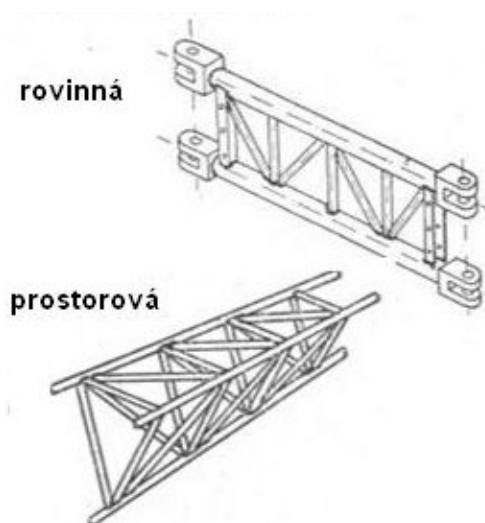
Použitím tuhých styčníků získáme vedle nežádoucích parazitních zatížení i některá významná pozitiva. Oboustranné vetknutí prutů pomocí tuhých styčníků nabízí, na rozdíl od kloubového spojení, značně větší tuhost konstrukce. Větší tuhost konstrukce umožňuje použití lehčích prutů a tím snížení celkové hmotnosti konstrukce a zvýšení efektivnosti materiálu. Další výhodou tuhých uzlů je možnost, aby pruty navazující na sebe v přímce (hlavní pruty, pásnice) nebyly děleny v každém styčnicku, ale byly vedeny řadou styčníků bez přerušení (obr. 1.1.2). To pak umožní významná technologická zjednodušení a snížení pracnosti konstrukce. [1]



Obr. 1.1.2 – Prutová konstrukce s tuhými styčnický [1]

### Rozdělení

Prutová konstrukce může být uspořádána jako prostorová nebo rovinná (obr. 1.1.3). Rovinná prutová konstrukce je na rozdíl od prostorové struktury, konstruována pouze na zatížení působící výhradně v její rovině. Při návrhu této rovinné konstrukce je nutné ošetřit možné zatížení působící mimo její rovinu jiným způsobem než vlastní stranovou tuhostí konstrukce. [1]



Obr. 1.1.3 – Typy prutových konstrukcí [1]

## 1.2 Použití prutových konstrukcí

Použití prutových konstrukcí je výhodné díky nízké hmotnosti celé konstrukce a značného využití mechanických vlastností materiálu. Existuje mnoho druhů prutových konstrukcí s různými průřezy, délkou, uspořádáním prutů a použitím.

Příklad použití prutových konstrukcí je uveden na obr. 1.2.1 – 1.2.4.



Obr. 1.2.1 – Věžový jeřáb



Obr. 1.2.2 – Stojanový jeřáb [6]

Příklad dalšího využití prutových konstrukcí:



Obr. 1.2.3 – Sloupy elektrického vedení



Obr. 1.2.4 – Konstrukce střech

## 2 Problematika modelování

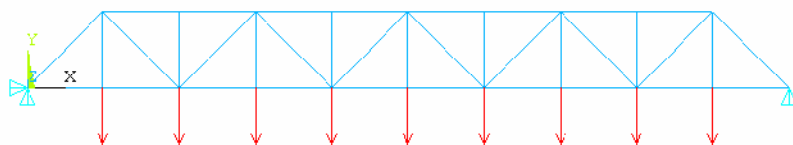
Vzhledem k rozsáhlosti problematiky modelování byly, pro vyjasnění úskalí této bakalářské práce, vybrány pouze některé kapitoly metody konečných prvků (MKP).

### 2.1 Princip metody konečných prvků

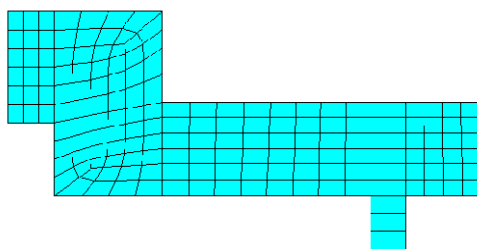
MKP je metoda, která rozdělí výpočtový model tak, že se rozloží na menší (fiktivní) části nazývané konečné prvky. Vzhledem k možné složitosti konstrukce je analýza těchto prvků relativně snadná. Tímto zjednodušením vzniká povinnost formulovat podmínky, které zajistí vytvoření souvislého celku. Těmito podmínkami definujeme rovnováhu a kompatibilitu konstrukce a zároveň vypočítáme neznámé silové nebo deformační faktory nejprve na hranicích jednotlivých prvků a později i uvnitř. [3]

#### Rozdělení konečných prvků podle:

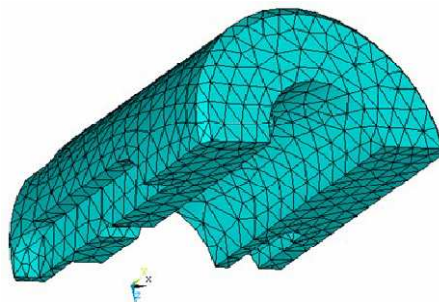
- dimenze úlohy na jednorozměrné, dvourozměrné, třírozměrné (obr 2.1 – 2.3)



Obr. 2.1 – Jednorozměrné prvky [2]



Obr. 2.2 – Dvourozměrné prvky [2]



Obr. 2.3 – Třírozměrné prvky [2]

- tvaru a použití na tyčové (link)

nosníkové (beam)

trojúhelníkové (triangular elements)

čtyřúhelníkové (quadrilateral elem.)

jehlanové (tetrahedrons)

šestistěnné (hexahedrons)

skořepinové (shells)

jiné

Pro prutové soustavy je MKP velmi dobře propracovaná. Konečným prvkem je jednorozměrný útvar – prut. Celek se člení na prvky konečných rozměrů, o nichž se však předpokládá, že souvisejí s ostatními prvky pouze v bodech. U prutových soustav je tento předpoklad splněn, jelikož z geometrie prutu vyplývá, že může souviset s ostatními prvky konstrukce pouze v bodech (styčnicích), takže jeden prvek může mít pouze dva stykové body. [3]

U vícerozměrných modelů tento předpoklad není splněn, jelikož prvky se spolu navzájem stýkají ve stykových hranách případně plochách, takže skutečný počet stykových bodů není konečný. Předpoklad bodové souvislosti zde vyvolává nutně nové problémy s dislokacemi podél stykových hran prvků. [3]

### **Postup řešení metodou konečných prvků [2]**

1. Rozdělení kontinua na prvky
2. Volba interpolačních funkcí
3. Odvození matice tuhosti (příp. hmotnosti) prvku
4. Sestavení globální matice tuhosti
5. Aplikace okrajových podmínek
6. Vyřešení soustavy rovnic
7. Získání dodatečně požadovaných veličin

Analýzou MKP odvodíme matici tuhosti nebo matici poddajnosti, která vzniká u každého prvku podle jeho fyzikálních a geometrických vlastností (každý prvek vzdoruje deformaci). Následně z matic tuhosti jednotlivých prvků sestavíme globální matici tuhosti, která nám umožňuje řešení základní rovnice MKP.

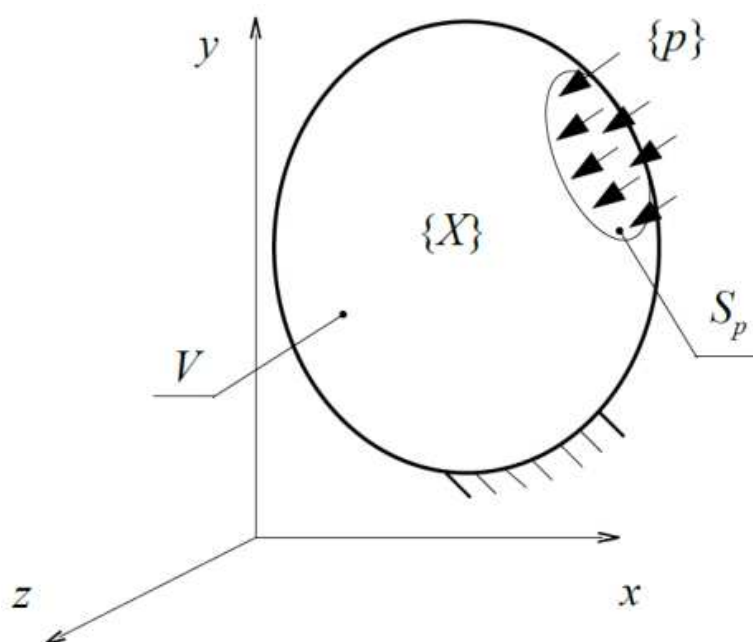
U jednorozměrných prvků lze snadno formulovat vztahy mezi silami a posuvy na rozdíl od vícerozměrného prvku, kde matici tuhosti nelze odvodit exaktně. Lze to provést jen nepřímou cestou, že se zvolí pro silové složky (u silových varianty) nebo pro složky posunutí (u deformačních varianty) náhradní funkce a požaduje se, aby na okrajích prvku měly tyto funkce hodnoty, které by alespoň přibližně odpovídaly silám nebo posunutím sousedních prvků. Vhodnost volby náhradních funkcí je rozhodující pro přesnost numerického řešení. [3]

## 2.2 Odvození základní rovnice MKP pro obecný prvek

Pro odvození základní rovnice MKP lze použít např. princip virtuálních prací, metodu vážených reziduí nebo princip minima potenciální energie systému. Princip minima potenciální energie systému je v porovnání s ostatními relativně jednoduchá metoda a lze ji využít pouze na elastické materiály. Potenciální energie systému lze vyjádřit pomocí deformační energie napjatosti a práce vnějších sil:  $\Pi = U + W$ . [2]

### Vyjádření potenciální energie systému [2]

Těleso v rovnováze nechť je zatíženo silami objemovými  $\{X\} = \{X, Y, Z\}^T$ , které na element působí (jedná se o předepsané síly) a povrchovými  $\{p_\rho\} = \{p_{\rho X}, p_{\rho Y}, p_{\rho Z}\}^T$ .



Obr. 2.2.1 – Obecné těleso [2]

Vlivem objemových a povrchových sil vznikne napětí  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T$ , které těleso zdeformuje. To má za následek posunutí  $\{u\} = \{u, v, w\}^T$  a deformace  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T$ .

Pro takové elastické těleso lze rozepsat potenciální energii systému bez úvahy zbytkových napětí (vznikající při výrobě) a počátečních deformací takto:

$$\Pi = U + W = \frac{1}{2} \int_{(V)} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{(V)} \{u\}^T \{X\} dV - \int_{(S_p)} \{u\}^T \{p_\rho\} dS \quad (2.1)$$

### Potenciální energie napjatosti obecného prvku

Rozdělením tělesa na  $N$  prvků lze celkovou potenciální energii systému získat ze součtu potenciální energie jednotlivých prvků:

$$\Pi = \sum_{e=1}^N \Pi^{(e)} \quad (2.2)$$

kde  $\Pi^e$  je potenciální energie prvku „e“

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{(V_e)} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{(V_e)} \{u\}^T \{X\} dV - \int_{(S_{pe})} \{u\}^T \{p_p\} dS \quad (2.3)$$

### Hookeův zákon pro elastický izotropní materiál

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Maticový zápis Hookeova zákona

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 + 2G & E_0 & E_0 & 0 & 0 & 0 \\ E_0 & E_0 + 2G & E_0 & 0 & 0 & 0 \\ E_0 & E_0 & E_0 + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad E_0 = \frac{2G\mu}{(1-2\mu)}$$

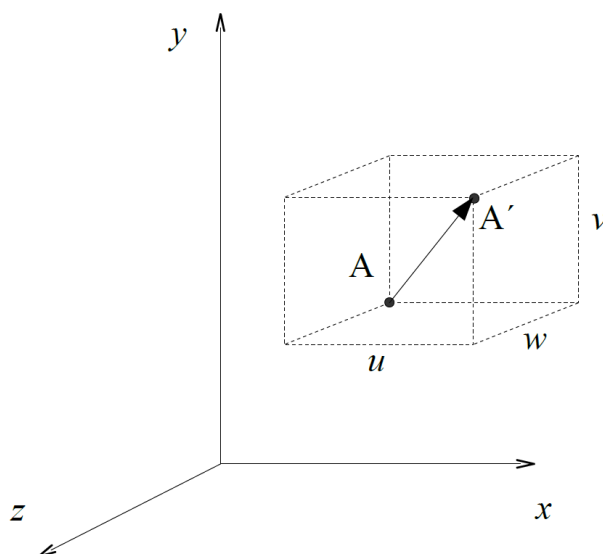
Po doplnění vztahu o práci zobecněných sil v uzlech a Hookeova zákona (2.5) dostaneme vztah

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{(V_e)} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV - \int_{(V_e)} \{u\}^T \{X\} dV - \int_{(S_{pe})} \{u\}^T \{p_p\} dS - \{r\}^T \{R\} \quad (2.6)$$

kde  $[C]$  je matice tuhosti materiálu a  $\{R\}$  je vektor zobecněných sil v uzlech prvku.

### Aproximace posuvů a přetvoření

Pomocí zobecněných uzlových posuvů vyjádříme u každého obecného prvku posunutí  $\{u\} = [N]\{r\}$  (2.7) a poměrné deformace z Cauchyho geometricko-deformačních rovnic.



Obr. 2.2.2 – Znázornění posuvů [2]

### Cauchyho geometricko-deformačních rovnice pro malé deformace

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta v}{\delta y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\delta w}{\delta z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}\end{aligned}\tag{2.8}$$

Maticový zápis Cauchyho geometricko-deformačních rovnic

$$\{\varepsilon\} = [\delta]^T \{u\}\tag{2.9}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Doplněním vztahu (2.9) vektorem posunutí (2.7) a následnou úpravou získáme rovnici:

$$\{\varepsilon\} = [\delta]^T \{u\} = [\delta]^T [N] \{r\} = [G] \{r\}\tag{2.10}$$

kde  $[N]$ ,  $[G]$  jsou transformační matice.



Po dosazení vztahů (2.7) a (2.10) do rovnice pro potenciální energii systému (2.6) a úpravě dostaneme potenciální energii obecného prvku::

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \{r\}^T \left( \int_{(V_e)} \{G\}^T [C] \{G\} dV \right) \{r\} - \{r\}^T \left( \int_{(V_e)} \{N\}^T \{X\} dV - \int_{(S_{pe})} \{N\}^T \{p_p\} dS - \{R\} \right) \quad (2.11)$$

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \{r\}^T |K^{(e)}| \{r\} - \{r\}^T \{R^{(e)}\} \quad (2.12)$$

kde  $|K^{(e)}|$  je lokální matice tuhosti (prvku) a  $\{R^{(e)}\}$  je lokální vektor zatížení (prvku).

Celková potenciální energie systému je pak dána součtem přes všechny prvky

$$\Pi = \sum_{e=1}^N \Pi^e = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T \sum_{e=1}^N |K^{(e)}| \{\Delta\} - \{\Delta\}^T \sum_{e=1}^N \{R^{(e)}\} \quad (2.13)$$

kde  $\{\Delta\}$  je vektor zobecněných posuvů pro všechny uzly konečnoprvkového modelu.

Minimum potenciální energie systému vyžaduje, aby první derivace byla rovna nule

$$\left\{ \frac{\delta \Pi}{\delta \{\Delta\}} \right\} = 0 \quad (2.14)$$

Po derivaci rovnice (2.13) se získá základní rovnice MKP pro elastickou úlohu

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\} \quad (2.15)$$

$[K]$  – globální matice tuhosti, která se získá součtem přes všechny prvky

$\{\Delta\}$  – vektor zobecněných posuvů pro všechny uzly konečnoprvkového modelu.

$\{F\}$  – vektor zobecněných uzlových sil, který lze obecně rozepsat takto:

$$\{F\} = \{R_p\} + \{R_\varepsilon\} - \{R_\sigma\} + \{R\} \quad (2.16)$$

$\{R_p\}$  - uzlové síly od vnějšího plošného zatížení

$\{R_\varepsilon\}$  - uzlové síly od počátečních deformací

$\{R_\sigma\}$  - uzlové síly od vneseného předpětí

$\{R\}$  - vnější zobecněné síly

### 3 Tvorba matematického modelu

Tvorba modelu je členěna do několika následujících kapitol, které objasní vznik a analýzu konečnoprvkového modelu prutové konstrukce. Tvorba a analýza modelu bude provedena v programu Ansys Workbench 13 v závislosti na dvou parametrech (délka  $L$  a výrobních nepřesnostech  $f$  obr. 3.2.2). Parametru délky  $L$  bylo přiřazeno 6 hodnot a výrobním nepřesností 5 hodnot. Vzájemnými kombinacemi těchto dvou parametrů vznikne 30 modelů. Úloha bude simulována pomocí lineární statiky.

#### 3.1 Inženýrská data

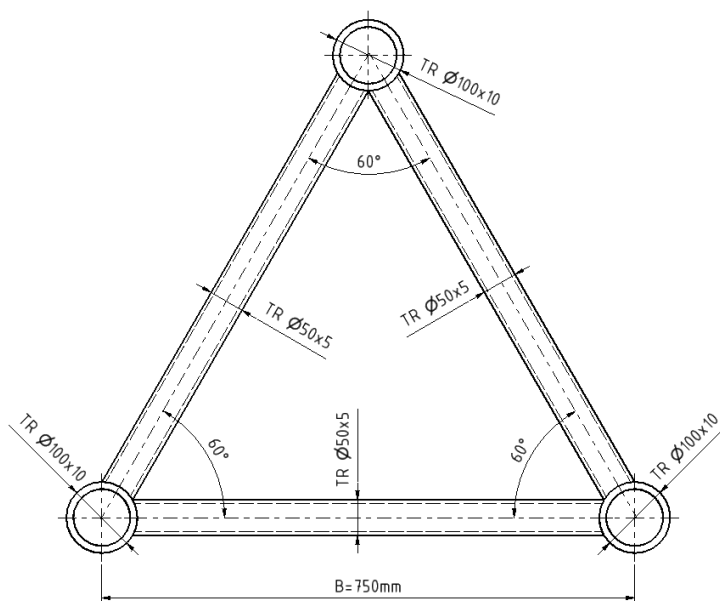
Pro analýzu prutové konstrukce byla zvolena běžná konstrukční ocel s následujícími vlastnostmi: modul pružnosti v tahu  $E = 200\,000\text{ MPa}$

poissonovo číslo  $\mu = 0,3$

hustota materiálu  $\rho_{ocel} = 7850\text{ kg.m}^{-3}$

#### 3.2 Geometrie modelu

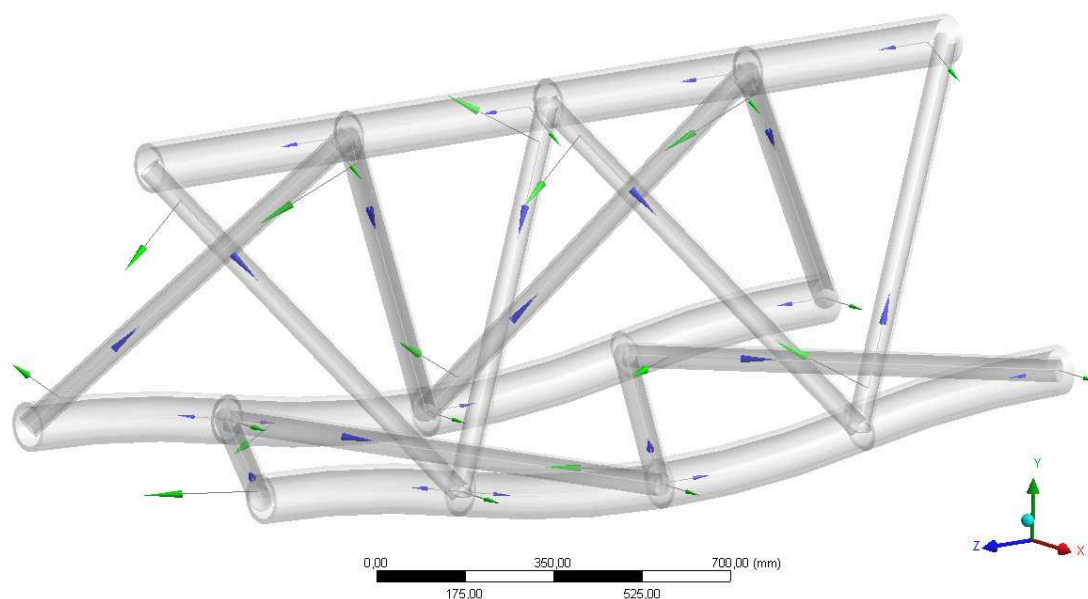
Model prutové konstrukce je definován průřezy jednotlivých prutů, vzdáleností mezi hlavními pruty  $B$ , délkou  $L$  a výrobními nepřesnostmi  $f$ . V modelu jsou použity pruty s kruhovým průřezem. Hlavní pruty tvoří trubky s vnějším průměrem 100mm a tloušťkou stěny 10mm. U výztuh jsou použity trubky s vnějším průměrem 50mm a tloušťkou stěny 5mm (obr. 3.2.1). Změna velikosti napětí a velikosti násobitele zatížení byla zkoumána v závislosti na výrobní nepřesnosti  $f \in \langle 0,50 \rangle$  a délce  $L \in \langle 1000, 2000 \rangle$  dle obr. 3.2.2. Rozměry modelu jsou stanoveny na žádost zadavatele.



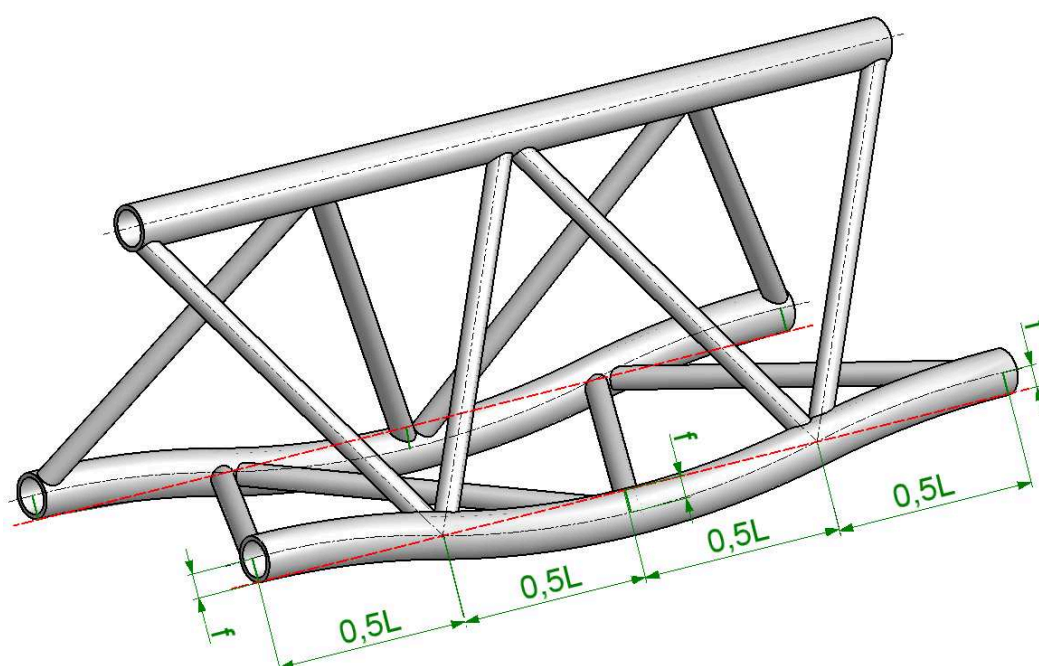
Obr. 3.2.1 – Rozměry prutové konstrukce

V modeláři programu Ansys Workbench 13 byl vytvořen model prutové konstrukce dle zadaných rozměrů (obr. 3.2.1). Pro analýzu prutové konstrukce jsou výrobní nepřesnosti  $f$  a polovina délky  $L$  definovány jako parametr (obr. 3.2.2), jelikož tyto hodnoty budou modifikovány. Polovina délky  $0,5L$  je parametrizována z konstrukčního důvodu a následné jednodušší modifikace.

Pro lepší názornost jsou parametry znázorněny zeleně na modelu vytvořeném v programu Autodesk Inventor 2009. Červená osa představuje střednici prutů ideálně rovné konstrukce. Výrobní nepřesnosti  $f$  byly aplikovány na dva hlavní pruty v rovnoběžných rovinách v shodném směru dle obr. 3.2.2.

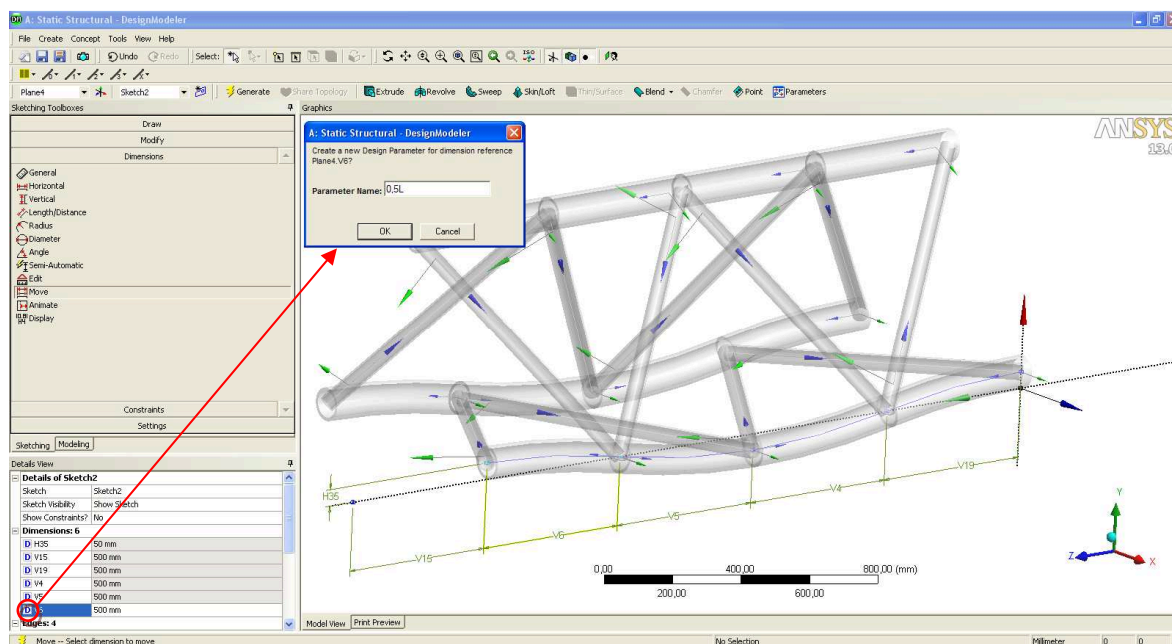


Obr. 3.2.1 – Model prutové konstrukce v prostředí Ansys Workbench 13

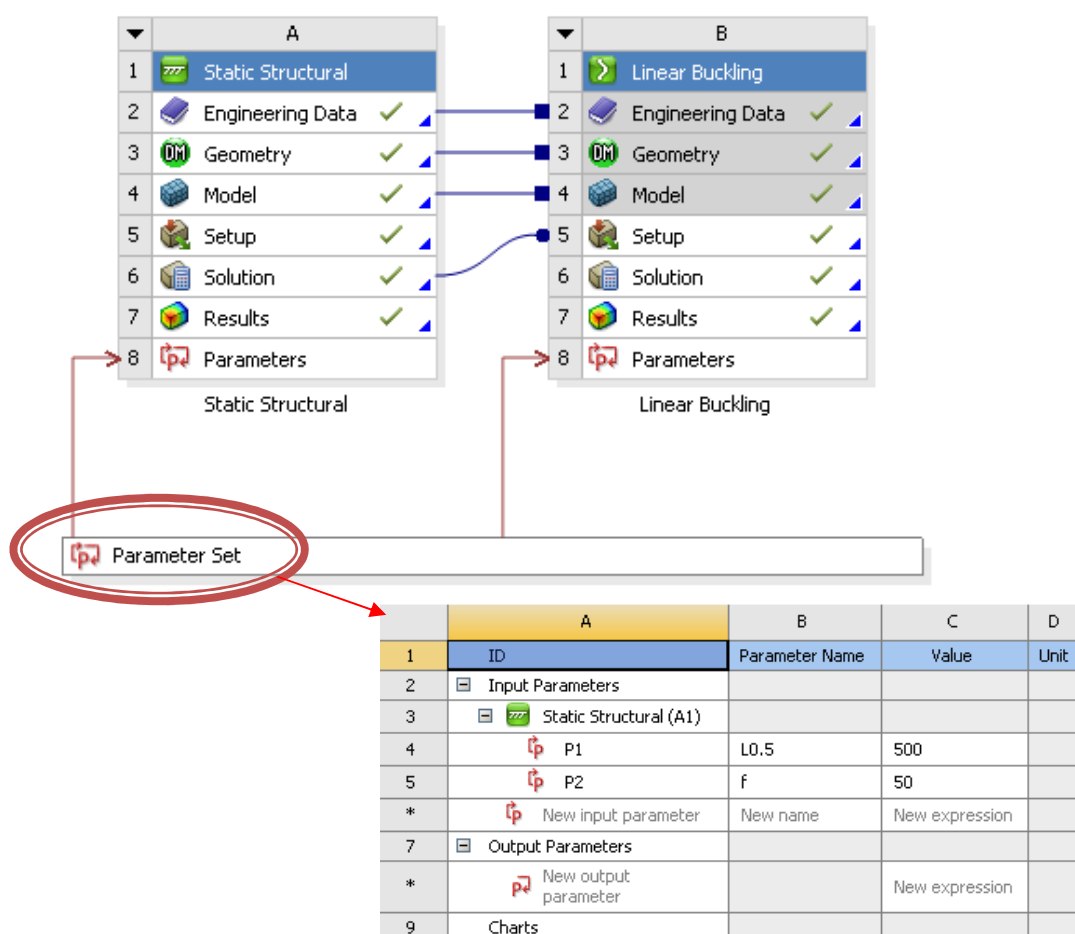


Obr. 3.2.2 – Parametrizované rozměry modelu

Postup parametrizace a modifikace vytipovaných rozměrů je znázorněn na obr. 3.2.3 a obr. 3.2.4.



Obr. 3.2.3 – Parametrizování rozměrů modelu



Obr. 3.2.4 – Modifikace jednotlivých parametrů

### 3.3 Volba typu elementu

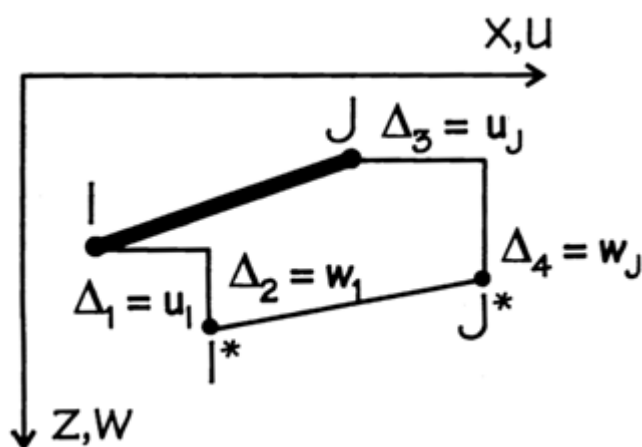
Výběr vhodného prvku pro řešení MKP závisí na geometrii soustavy, na počtu nezávislých prostorových souřadnic popisujících úlohu a na typu napjatosti. Pro prutovou soustavu je vhodné volit 1D prvek, který má oproti 3D prvku velmi jednoduchou geometrii a tím i velmi krátký výpočtový čas.

#### Nejpoužívanější 1D prvky s 2 uzly dle literatury [4]:

Tyčový prvek – počet zobecněných posuvů = 2

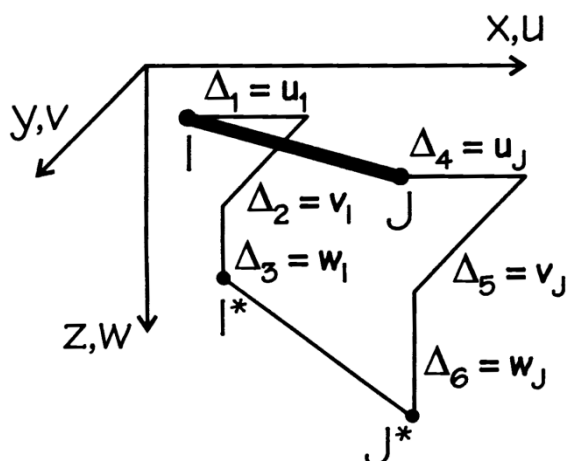
Prutový prvek pro:

Rovinné příhradoviny – počet zobecněných posuvů = 4 (posuvy  $u_I, w_I, u_J, w_J$ )



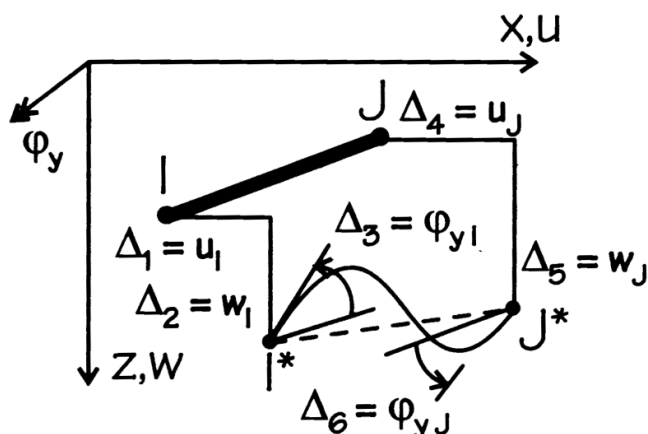
Obr. 3.3.1 – Prvek pro rovinné příhradoviny [4]

Prostorové příhradoviny – počet zobecněných posuvů = 6 (posuvy  $u_I, v_I, w_I, u_J, v_J, w_J$ )



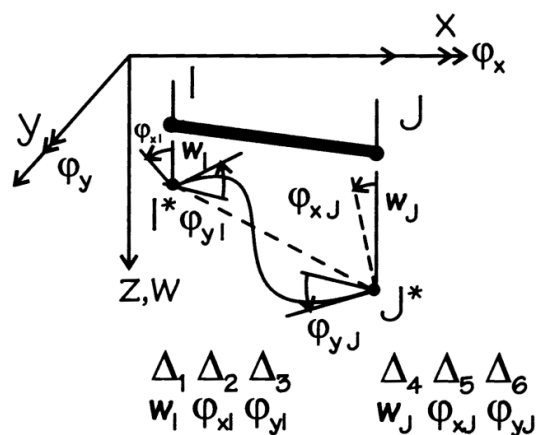
Obr. 3.3.2 – Prvek pro prostorové příhradoviny [4]

Rovinné rámy (nosníkový prvek) – počet zobecněných posuvů = 6 (posuvy  $u_I, w_I, u_J, w_J$ , úhly natočení příčných řezů v uzlech  $\varphi_{yI}, \varphi_{yJ}$ )



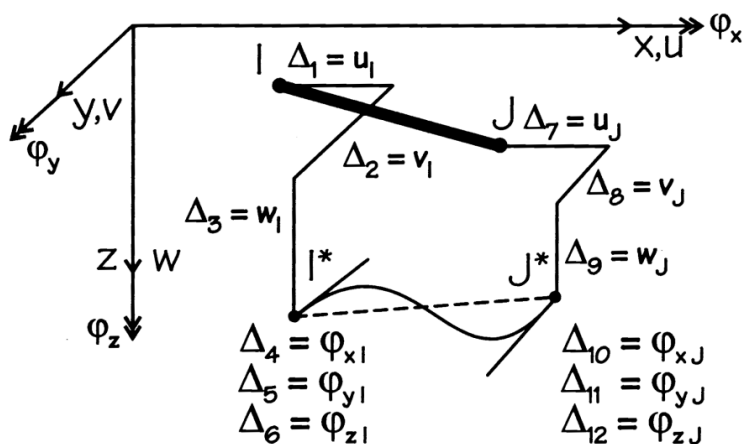
Obr. 3.3.3 – Prvek pro rovinné rámy [4]

Rovinné rošty – počet zobecněných posuvů = 6 (posuvy  $w_I, w_J$ , úhly natočení příčných řezů v uzlech  $\varphi_{xI}, \varphi_{yI}, \varphi_{xJ}, \varphi_{yJ}$ )



Obr. 3.3.4 – Prvek pro rovinné rošty [4]

Prostorové rámy – počet zobecněných posuvů = 12 (posuvy  $u_I, v_I, w_I, u_J, v_J, w_J$ , natočení příčných řezů v uzlech  $\varphi_{xI}, \varphi_{yI}, \varphi_{zI}, \varphi_{xJ}, \varphi_{yJ}, \varphi_{zJ}$ )



Obr. 3.3.5 – Prvek pro prostorové rámy [4]

Pro analýzu modelu byl zvolen prvek BEAM 188, který má 2 uzly a 12 zobecněných posuvů (posuvy  $u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j$ , natočení příčných řezů v uzlech  $\varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}$ ) obr 3.3.5.

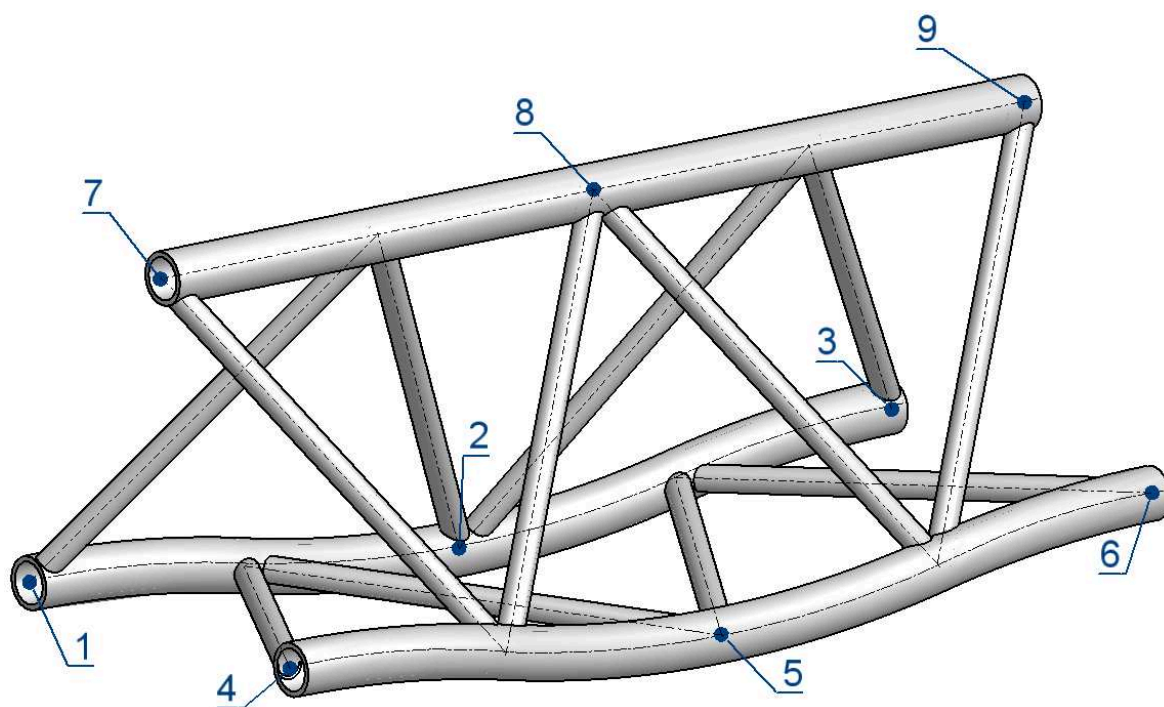
Po aplikaci okrajových podmínek bude provedena analýza citlivosti sítě, která určí vhodnou hustotu sítě (vhodný počet elementů).

### 3.4 Okrajové podmínky

#### 3.4.1 Typy okrajových podmínek [2]

1. Statické (silové) – ve vyšetřovaném bodě na povrchu tělesa musí platit podmínky rovnováhy
2. Kinematické (geometrické) – předepisují hodnotu složek vektoru posunutí nebo jejich derivací na povrchu tělesa nebo jeho části. Zjednodušeně nahrazují kontakt řešeného tělesa s jiným tělesem, které může působit jako podpora. Jedná se tedy o vyjádření vazeb mezi tělesy.

Pro snadnější orientaci při aplikaci okrajových podmínek byly vybrány styčníky, ve kterých bude prováděna analýza, očíslovány dle obr 3.4.1.

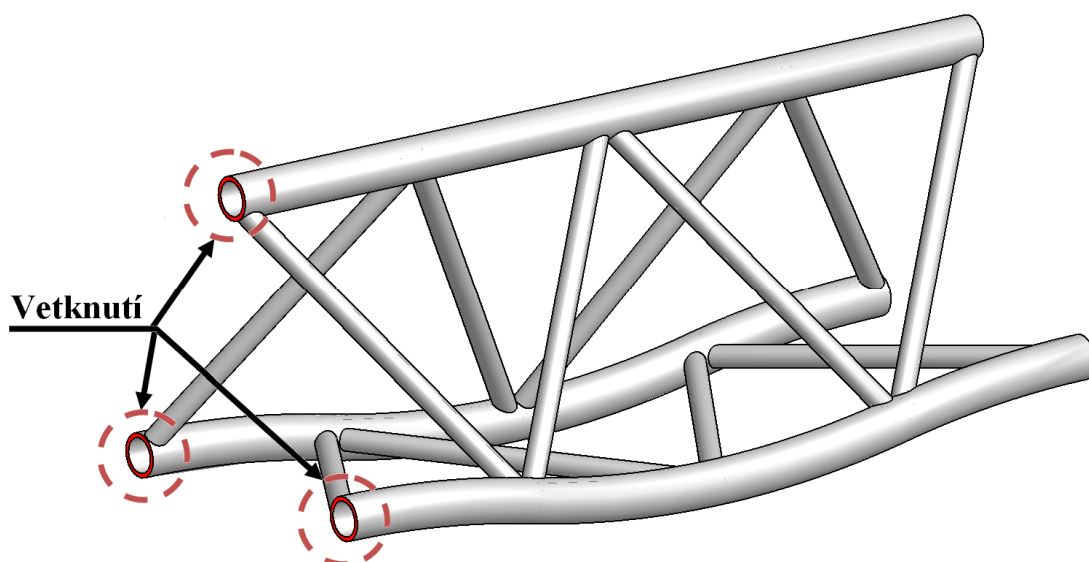


Obr. 3.4.1 – Označení vybraných styčníků

### 3.4.2 Aplikace okrajových podmínek

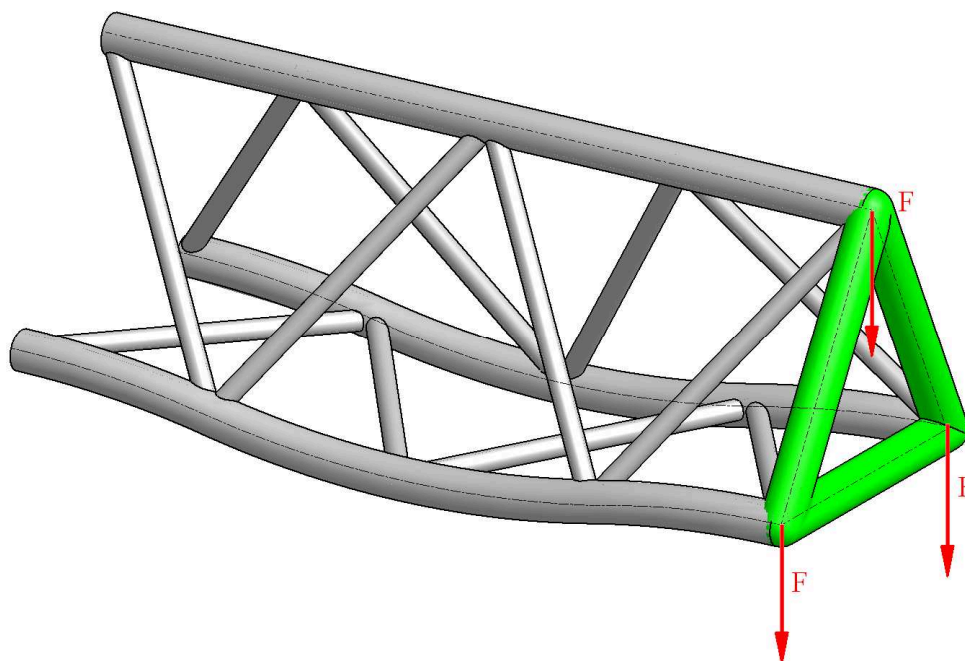
Pro model prutové soustavy byly okrajové podmínky definovány na žádost zadavatele:

- na krajních třech styčnících 1,4, a 7 dle obr. 3.4.1 bylo aplikováno vetknutí (odebráno 6 stupňů volnosti – posuv v ose X, Y, Z a rotace kolem osy X,Y,Z) (obr. 3.4.2). Tato okrajová podmínka simuluje pevné ukotvení modelu.



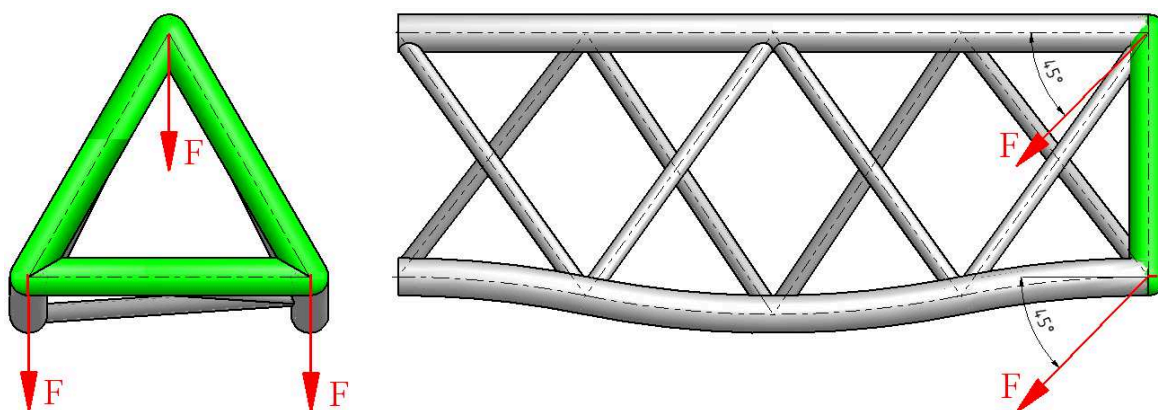
Obr. 3.4.2 – Umístění vetknutí

- na opačné straně ukotvení byl vytvořen spojením styčníků 3,6 a 9 rám(označen zeleně). Tento rám, který uzavře konstrukci, má průřez shodný s hlavními pruty. Prutová konstrukce bude analyzována při ohybovém zatížení a vzpěru. Směr sil pro varianty zatížení A, B a C je definováno na obr. 3.4.3 – 3.4.5.

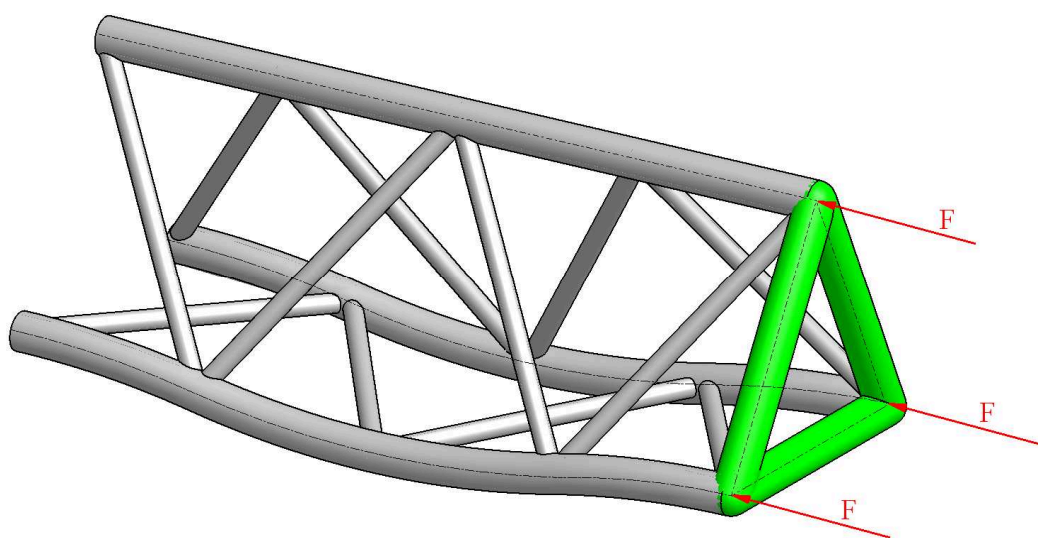


Obr. 3.4.3 – Varianta zatížení A





Obr. 3.4.4 – Varianta zatížení B



Obr. 3.4.5 – Varianta zatížení C

Jelikož se jedná o lineárně statickou úlohu a cílem práce není dosáhnout velikost napětí nebo násobitele zatížení, ale jejich změnu v závislosti na zkoumaných parametrech, může být velikost síly volena libovolně. Je pouze nutné dodržet způsob zatížení ohybem a tlakem dle zadavatele (obr. 3.4.3 – obr. 3.4.5).

Změna napětí byla analyzována na modelech zatížených variantou A (obr. 3.4.3) a poté variantou B (obr. 3.4.4). Celková působící síla  $F_{cn}=30000\text{N}$  byla rozložena do třech krajních styčníků 3, 6 a 9. Z toho plyne, že při analýze změny napětí na každý styčník působila síla  $F_n=10000\text{N}$ .

Změna koeficientu násobitele zatížení (Load multiplier) byla analyzována na modelech zatíženém variantou A (obr. 3.4.3), variantou B (obr. 3.4.4) a poté variantou C (obr. 3.4.5). Celková působící síla  $F_{cv}$  byla rozložena do třech krajních styčníků 3, 6 a 9. Z důvodu jednoduššího zjištění kritické síly, která je násobkem působící síly a násobitele zatížení, je celková síla  $F_{cv}=10000\text{N}$ .

## 4 Hustota sítě

Obecně platí, že čím je hustota sítě větší, tím se výsledky více blíží teoretickým hodnotám. Cenou za větší přesnost je delší výpočtová doba a požadavek na větší kapacitu paměti. Se zvětšováním rozsahu úlohy totiž roste numerická chyba výpočtu způsobená zaokrouhlováním čísel v počítači. Součet chyb z aproximace funkcí a numerické chyby má pro jistou hustotu dělení minimum a další zhušťování dělení by výsledky zhoršovalo. [4]

Jelikož prut lze považovat za element tak hustota sítě má minimální vliv na přesnost výsledku. Tento předpoklad je potvrzen analýzou citlivosti sítě.

### 4.1 Analýza citlivosti sítě

Pro analýzu citlivosti sítě je vybrán model s následujícími parametry obr. 3.2.2 :

délka  $L = 2000$  mm

průhyb  $f = 50$  mm

Celková zatěžující síla rozložena do styčnicků 3, 6 a 9 –  $F_a = 30000$  N

Analýza citlivosti sítě je prováděna s elementy typu BEAM 188. Změnou velikosti elementu bude zkoumán vliv hustoty sítě na přesnost výsledků. Pro analýzu byly zvoleny pomocí funkce Sizing následující velikosti elementů 150 mm; 100 mm; 50 mm; 25 mm; 5 mm.

**Tab. 4.1.1** – Vypočtené hodnoty napětí v závislosti na velikosti elementu (Sizing) na jednotlivých styčnicích [MPa]

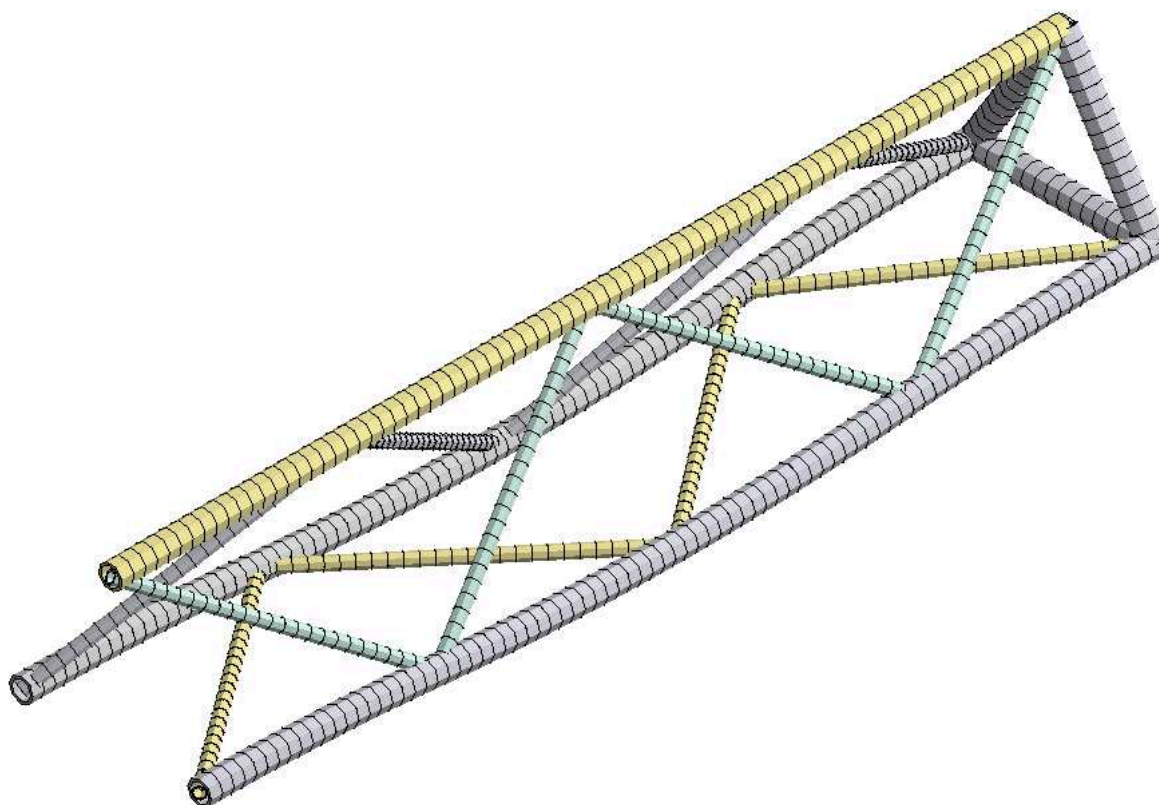
Sizing [mm]	Počet elementů	Číslo styčnicku								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	207	-34,50	-28,29	-14,91	-46,20	-32,07	-14,70	86,64	33,27	17,94
100	308	-34,38	-28,32	-14,97	-46,23	-32,04	-14,70	86,64	33,27	17,94
50	599	-34,32	-28,32	-15,00	-46,23	-32,01	-14,73	86,67	33,27	17,94
25	1182	-34,29	-28,32	-15,00	-46,23	-32,01	-14,73	86,67	33,27	17,94
5	5848	-34,29	-28,32	-15,00	-46,23	-32,01	-14,73	86,67	33,27	17,94

**Tab. 4.1.2** – Procentuální rozdíl napětí při použití hustší sítě oproti předchozí [%]

	Číslo styčnicku								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sít' s 308 elementy oproti 207	-0,35	0,11	0,40	0,06	-0,09	0,00	0,00	0,00	0,00
Sít' s 599 elementy oproti 308	-0,17	0,00	0,20	0,00	-0,09	0,20	0,03	0,00	0,00
Sít' s 1182 elementy oproti 599	-0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Sít' s 5848 elementy oproti 1182	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Z tabulky 4.1.1 a 4.1.2 vyplývá, že hustota sítě má na napětí ve vybraných uzlech velmi malý vliv. Z důvodu úspory času je proto zbytečné volit příliš hustou síť.

Pro analýzu změny napětí a změny násobitele zatížení ve styčnicích byl zvolen, pro největší model s délkou  $L=2000\text{mm}$  a průhybem  $f=50\text{mm}$ , počet elementů 1182 typu BEAM 188.



Obr. 4.1 – Síť konečných prvků (1182 elementů) pro model s  $L=2000\text{mm}$  a  $f=50\text{mm}$

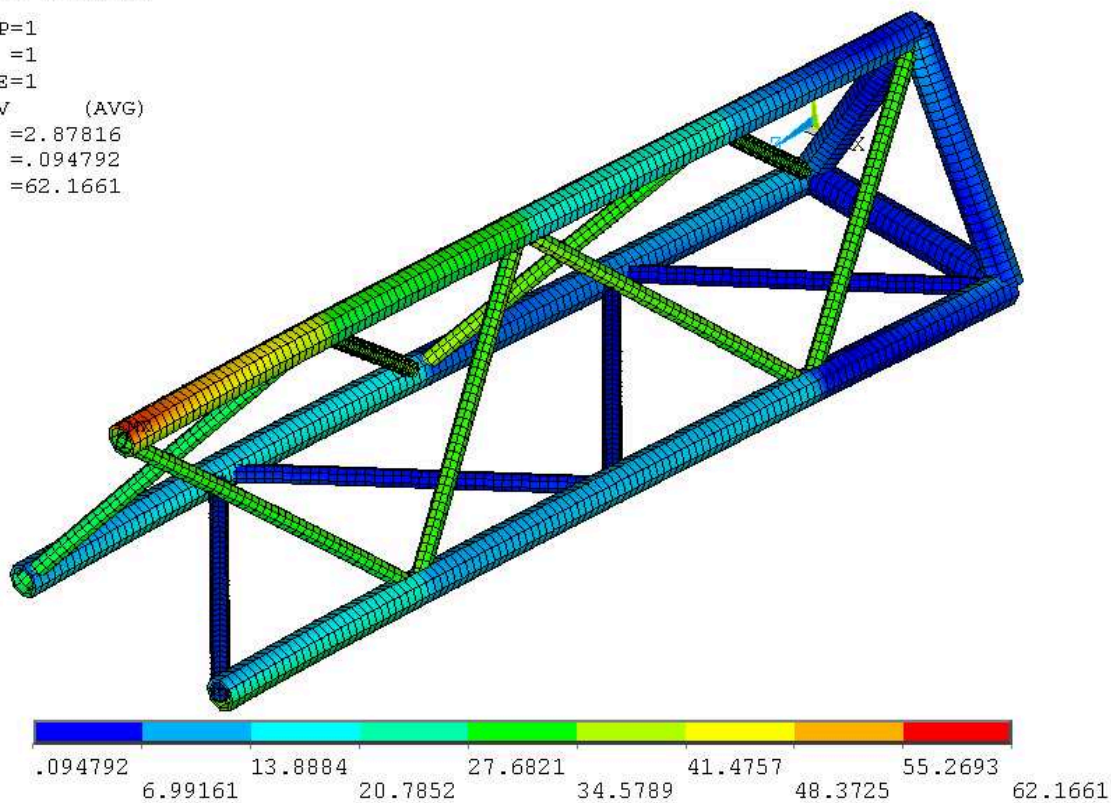
## 5 Numerické řešení jednotlivých variant modelu

Pro ukázkou je průběh napětí znázorněn pouze pro model s parametry  $L=1500\text{mm}$  při ideálně rovné konstrukci a pro konstrukci s výrobní nepřesností  $f=50\text{mm}$  pro dvě varianty zatížení. Varianta zatížení A je znázorněna na obr. 5.1 a 5.2 a varianta zatížení B je znázorněna na obr. 5.3 a 5.4. Všechny výpočty byly prováděny podle hypotézy HMM (Von Mises).

Vypočtené hodnoty napětí ve styčnicích jsou uvedeny v tabulce 5.2.1.1 – 5.2.4.2.

NODAL SOLUTION

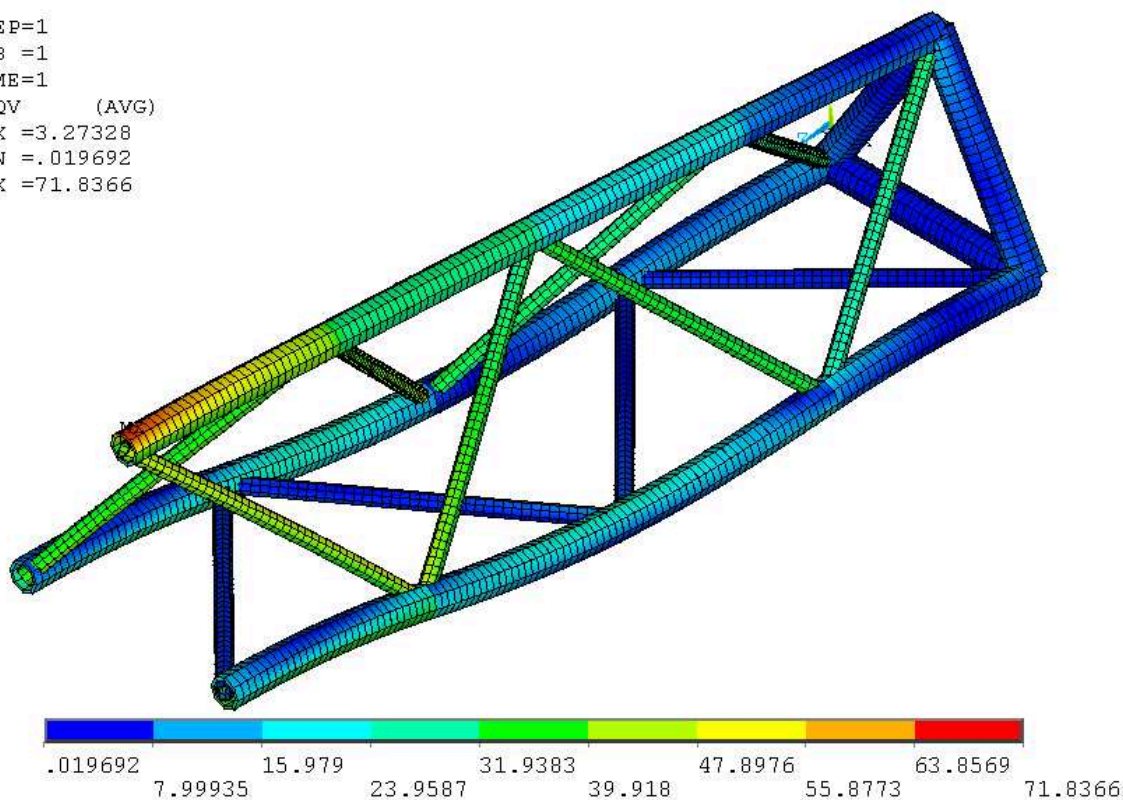
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SEQV (AVG)  
DMX =2.87816  
SMN =.094792  
SMX =62.1661



Obr. 5.1 Zatížení variantu A, ideálně rovná konstrukce, L=1500mm

NODAL SOLUTION

STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SEQV (AVG)  
DMX =3.27328  
SMN =.019692  
SMX =71.8366

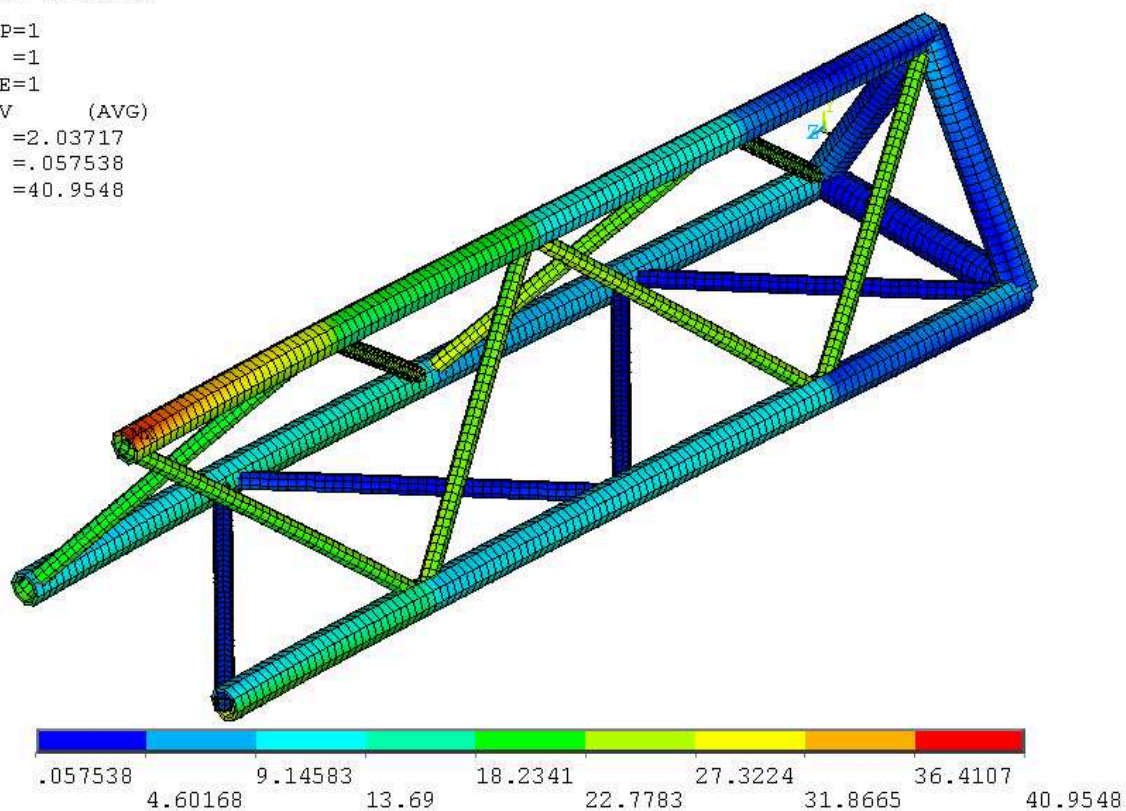


Obr. 5.2 Zatížení variantu A, výrobní nepřesnosti  $f=50\text{mm}$ , L=1500mm



NODAL SOLUTION

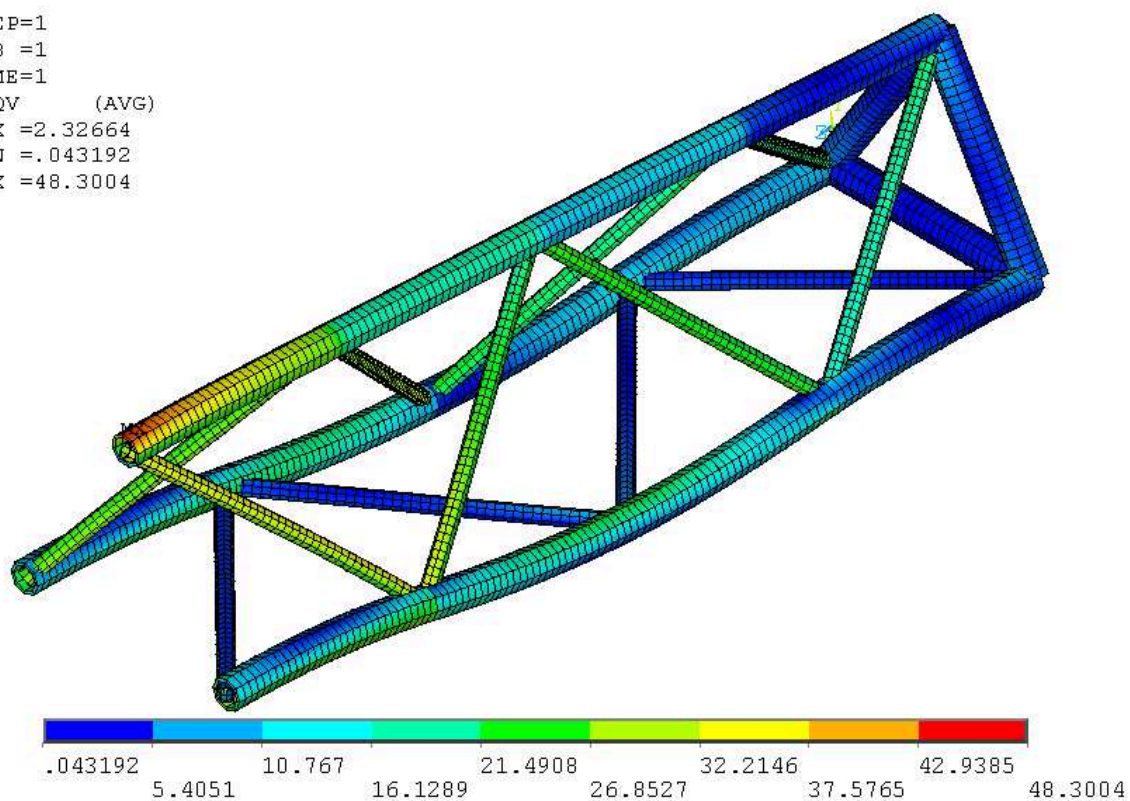
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SEQV (AVG)  
DMX =2.03717  
SMN =.057538  
SMX =40.9548



Obr. 5.3 Zatížení variantu B, ideálně rovná konstrukce, L=1500mm

NODAL SOLUTION

STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SEQV (AVG)  
DMX =2.32664  
SMN =.043192  
SMX =48.3004



Obr. 5.4 Zatížení variantu B, výrobní nepřesnosti  $f=50\text{mm}$ , L=1500mm

## 5.1 Koeficient změny napětí

Cílem bakalářské práce je zjistit koeficienty změny napětí v závislosti na délce  $L$  a výrobních nepřesnostech  $f$ .

Koeficient změny napětí se stanoví dle následujícího vztahu:

$$k_n = \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \quad (5.1)$$

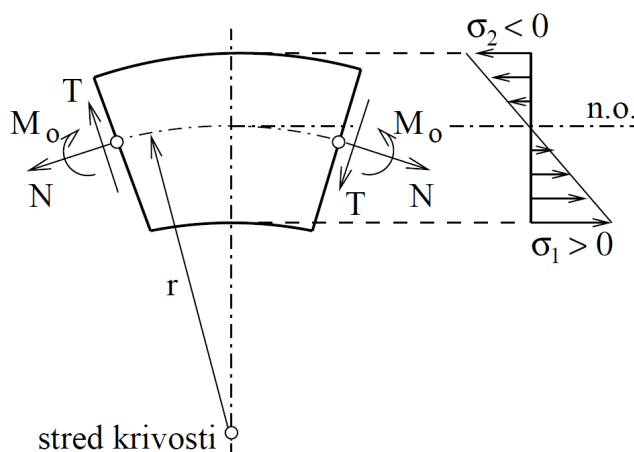
kde:

- $\sigma_f$  je hodnota napětí v MPa na konstrukci s výrobními nepřesnostmi  $f$  na zvoleném styčnicku při dané délce  $L$
- $\sigma_0$  je hodnota referenčního napětí v MPa, které je vypočtené na ideálně rovné prutové konstrukci na shodném styčnicku jako pro  $\sigma_f$  při stejné délce  $L$

Daný koeficient představuje míru kolikrát je hodnota napětí v daném styčnicku u konstrukce s výrobními nepřesnostmi větší/menší než hodnota napětí ideálně rovné prutové konstrukce. Hodnota koeficientu pro ideálně rovnou prutovou konstrukci je roven 1. Pro ukázkou je vybrán styčník 5 a 7. Hodnoty napětí, koeficienty změny napětí a grafy v ostatních styčnicích jsou uvedeny v příloze A.

Podle naměřených hodnot napětí byly vytvořeny tab. 5.2.1.1 – 5.2.4.2 a z nich grafy obr. 5.2.1 – 5.2.4, v programu Matlab 2010. Tyto grafy pomohou objasnit kolikrát se hodnota napětí změní při různých výrobních a provozních nepřesnostech na modelech s různou délkou  $L$  a při variantách zatížení A a B.

Vlákna tyče namáhané ohybem jsou namáhána jak tahovým, tak tlakovým napětím tzn. nemá konstantní průběh napětí viz. obr. 5.1.1. Pro analýzu změny napětí je vybráno napětí, které je vyšší z tahového nebo tlakové napětí.



Obr. 5.1.1 – Průběh napětí [5]

## 5.2 Grafy koeficientů změny napětí

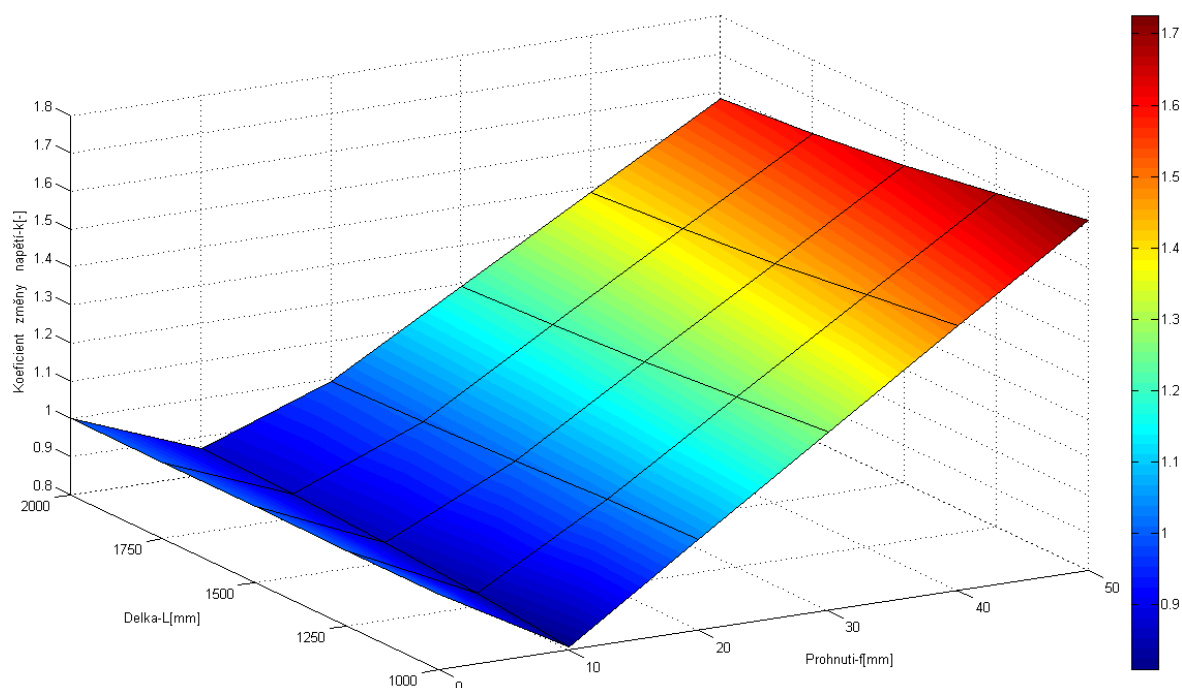
### 5.2.1 Analýza ve styčnicku 5 při zatížení varianta A

Tab. 5.2.1.1 Tabulka vypočtených hodnot

Napětí v styčnicku 5 při variantě zatížení A [MPa]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	10,223	12,668	15,171	17,693	20,222
	10	8,284	10,596	12,952	15,284	17,600
	20	10,642	13,051	15,409	17,755	20,098
	30	12,987	15,807	18,579	21,342	24,104
	40	15,320	18,546	21,726	24,899	28,074
	50	17,642	21,269	24,851	28,428	32,009

Tab. 5.2.1.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny napětí v styčnicku 5 při variantě zatížení A [-]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	0,810	0,836	0,854	0,864	0,870
	20	1,041	1,030	1,016	1,004	0,994
	30	1,270	1,248	1,225	1,206	1,192
	40	1,499	1,464	1,432	1,407	1,388
	50	1,726	1,679	1,638	1,607	1,583



Obr. 5.2.1 Graf koeficientu změny napětí ve styčnicku 5 při variantě zatížení A

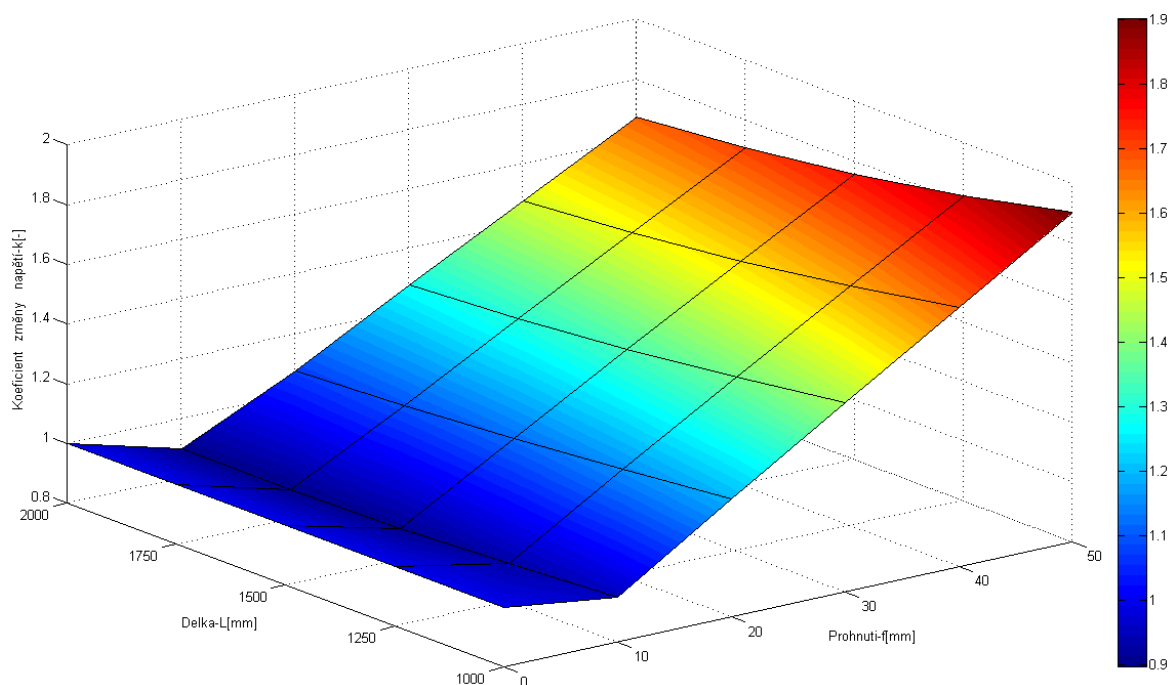
## 5.2.2 Analýza ve styčnicku 5 při zatížení varianta B

Tab. 5.2.2.1 Tabulka vypočtených hodnot

Napětí v styčnicku 5 při variantě zatížení B [MPa]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	9,623	11,350	13,123	14,913	16,708
	10	9,166	10,534	11,874	13,398	15,021
	20	11,502	13,121	14,730	16,345	17,968
	30	13,802	15,669	17,543	19,434	21,339
	40	16,068	18,179	20,315	22,477	24,660
	50	18,299	20,653	23,047	25,476	27,932

Tab. 5.2.2.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny napětí v styčnicku 5 při variantě zatížení B [-]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	0,952	0,928	0,905	0,898	0,899
	20	1,195	1,156	1,122	1,096	1,075
	30	1,434	1,381	1,337	1,303	1,277
	40	1,670	1,602	1,548	1,507	1,476
	50	1,902	1,820	1,756	1,708	1,672



Obr. 5.2.2 Graf koeficientu změny napětí ve styčnicku 5 při variantě zatížení B



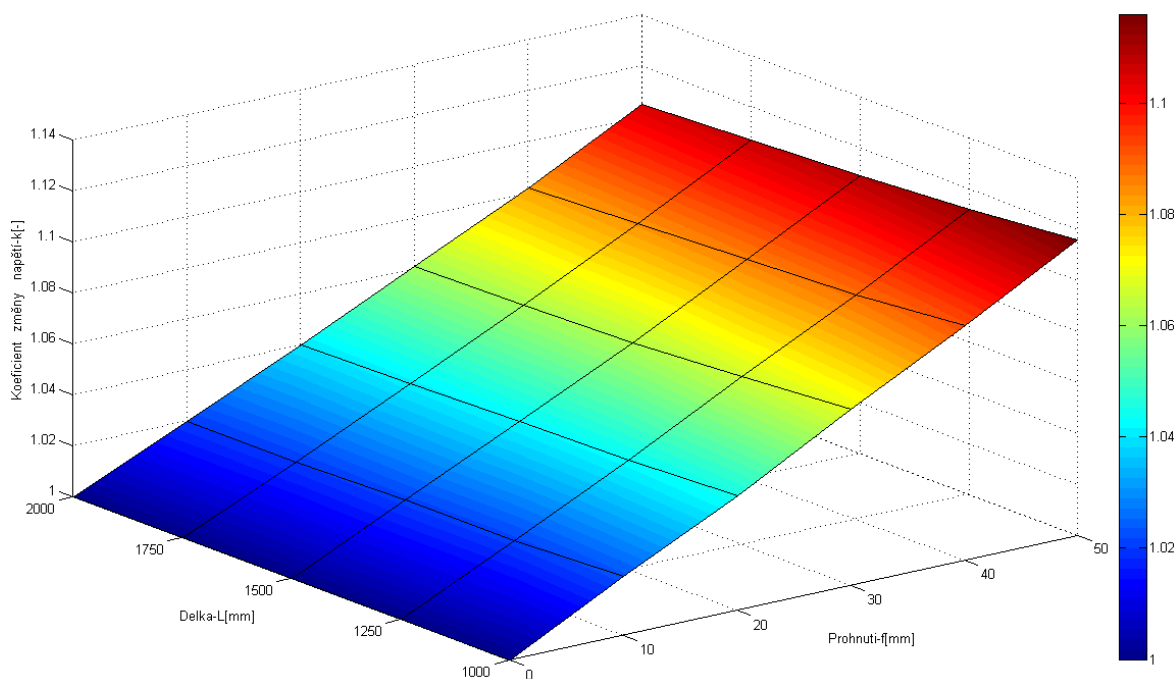
### 5.2.3 Analýza ve styčnicku 7 při zatížení varianta A

Tab. 5.2.3.1 Tabulka vypočtených hodnot

Napětí v styčnicku 7 při variantě zatížení A [MPa]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	47,914	54,664	62,166	70,140	78,416
	10	48,996	55,835	63,446	71,543	79,952
	20	50,090	57,028	64,759	72,988	81,538
	30	51,200	58,248	66,108	74,480	83,180
	40	52,330	59,498	67,499	76,023	84,884
	50	53,482	60,784	68,937	77,625	86,656

Tab. 5.2.3.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny napětí v styčnicku 7 při variantě zatížení A [-]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	1,023	1,021	1,021	1,020	1,020
	20	1,045	1,043	1,042	1,041	1,040
	30	1,069	1,066	1,063	1,062	1,061
	40	1,092	1,088	1,086	1,084	1,082
	50	1,116	1,112	1,109	1,107	1,105



Obr. 5.2.3 Graf koeficientu změny napětí ve styčnicku 7 při variantě zatížení A

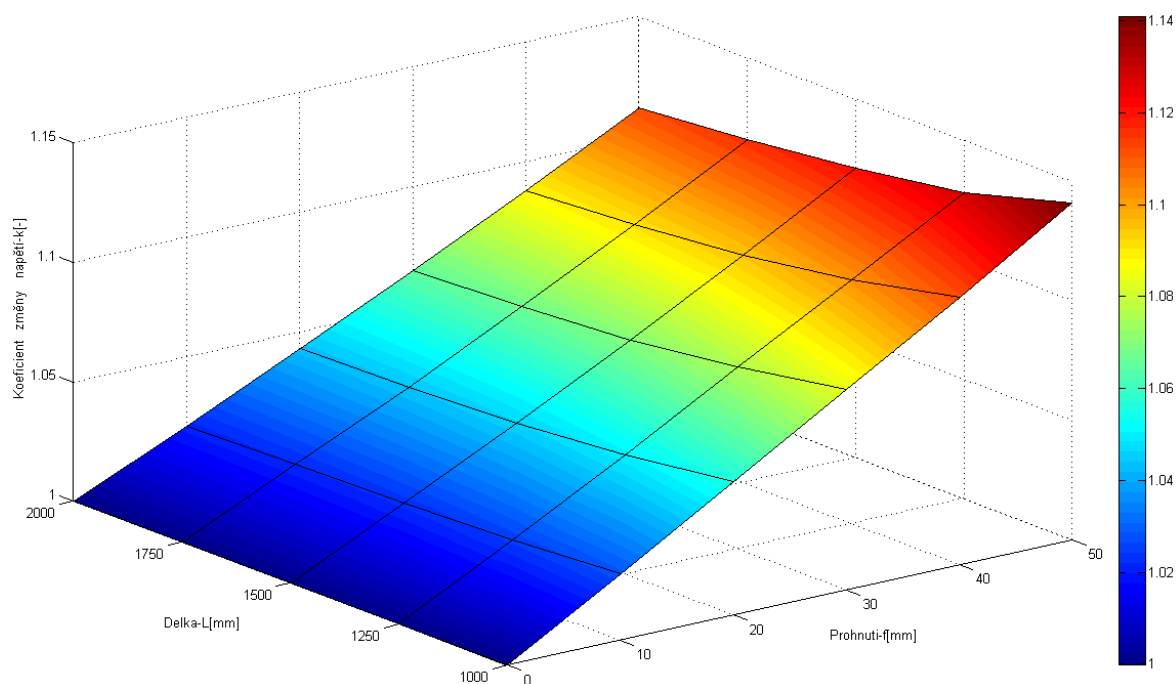
## 5.2.4 Analýza ve styčnicku 7 při zatížení varianta B

Tab. 5.2.4.1 Tabulka vypočtených hodnot

Napětí v styčnicku 7 při variantě zatížení B [MPa]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	30,955	35,680	40,954	46,572	52,410
	10	31,816	36,566	41,895	47,586	53,508
	20	32,681	37,463	42,855	48,627	54,641
	30	33,550	38,376	43,840	49,699	55,812
	40	34,427	39,307	44,851	50,808	57,026
	50	35,316	40,260	45,895	51,956	58,288

Tab. 5.2.4.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny napětí v styčnicku 7 při variantě zatížení B [-]						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	1,028	1,025	1,023	1,022	1,021
	20	1,056	1,050	1,046	1,044	1,043
	30	1,084	1,076	1,070	1,067	1,065
	40	1,112	1,102	1,095	1,091	1,088
	50	1,141	1,128	1,121	1,116	1,112



Obr. 5.2.4 Graf koeficientu změny napětí ve styčnicku 7 při variantě zatížení B

### 5.3 Hodnocení vlivu jednotlivých parametrů na průběh napětí

**Délka L** – Napětí se v styčnicku 5 a 7 mírně snižuje se vzrůstající délkou. V těchto styčnicích není tedy výrazný ovšem v některých ostatních styčnicích dle přílohy A dochází ke změně napětí vlivem délky L razantněji. Vliv délky je tedy nepopíratelný.

**Výrobní nepřesnosti f** - napětí v styčnicku 5 se s nárůstem výrobní nepřesnosti do 10mm nejprve snižuje, ale při výrobní nepřesnosti větší než 10mm dochází k vzrůstu napětí až 1,902x oproti ideálně rovné konstrukci s parametrem délky  $L=1000\text{mm}$  při zatížení variantou B. Stejně tak v ostatních styčnicích dochází k snížení nebo nárůstu napětí vlivem výrobní nepřesností. Je tedy potřeba při výrobě tento jev zohlednit.

## 6 Ztráta stability tvaru

Tlaková zatížení prutů nejsou vzhledem k jejich štíhlosti obvykle limitována pevností materiálu, přesněji jeho mezí kluzu v tlaku, ale ztrátou vzpěrové stability, tedy vybočením po dosažení kritického napětí, které bývá daleko nižší než zmíněná mez kluzu. Velikost kritického napětí je závislá na štíhlosti prutu a způsobu jeho vetknutí do styčnicku [1].

### 6.1 Stabilita přímých prutů namáhaných tlakem

Při zatížení štíhlého prutu tlakově osovou silou malé hodnoty nedojde ani při pokusu o boční vychýlení střednice prutu k ztrátě stability tvaru. Při zatížení osovou silou vyšší než je kritická síla a při sebemenším prvotním vychýlení se prut nevrátí do původního tvaru, ale naopak dojde k jeho porušení [7].

Podmínka stability je splněna, pokud osová síla/napětí je menší než kritická síla/napětí

$$F < F_{Kr} \text{ resp. } \sigma < \sigma_{Kr} \quad (6.1)$$

Hodnota tlakového napětí při osové síle rovné kritické síle  $F_{kr}$ , působící na plochu průřezu  $S$ , se nazývá kritické napětí:

$$\sigma_{Kr} = \frac{F_{Kr}}{S} \quad (6.2)$$

Při teoretickém výpočtu prutů namáhaných na vzpěr se počítá s ideálním stavem, bez výrobních nepřesností. Ve skutečnosti se nepříznivě projeví výrobní nepřesnost, nehomogenita a anizotropie materiálu, která spolu s excentrickým působením osové síly vyvolá přídatný ohybový moment [8].

### 6.1.1 Kontrola stability podle Eulera

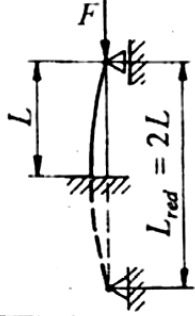
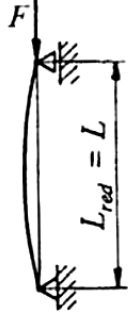
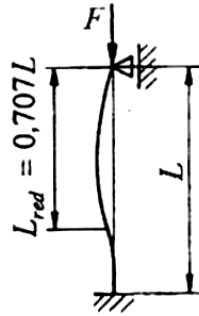
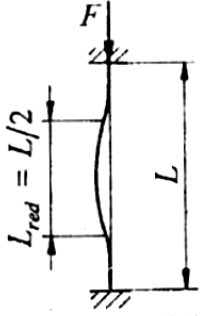
Hodnota kritické Eulerovy síly  $F_{kr}$  pro všechny případy vzpěru vychází z diferenciální rovnice průhybové křivky. Vzorec pro kritickou sílu má následující tvar [7]:

$$F_{Kr} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{L_{red}^2} \quad (6.3)$$

kde  $E$  – modul pružnosti v tahu

$J_{min}$  – kvadratický moment s nejnižší hodnotou, jelikož prut ztrácí stabilitu ve směru nejmenší ohybové tuhosti

$L_{red}$  – redukovaná délka prutu, která je závislá na uložení, na níž je prut při vzpěru namáhán viz obr 6.1.1.

	I	II	III	IV
				
$L_{red}$	$2L$	$L$	$0,707L$	$L/2$
$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{L_{red}^2} = \frac{\beta \pi^2 EJ_{min}}{L^2}$				
$F_{kr}$	$\frac{\pi^2 EJ_{min}}{4L^2}$	$\frac{\pi^2 EJ_{min}}{L^2}$	$\frac{2\pi^2 EJ_{min}}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EJ_{min}}{L^2}$
$\beta$	$1/4$	$1$	$2$	$4$

Tab. 6.1.1 Tabulka vlivu uložení prutu na redukovanou délku [8]

#### Omezení platnosti Eulerova vzorce [7]

Přibližná diferenciální rovnice průhybové křivky, z které je odvozen Eulerův vzorec pro kritickou sílu, byla odvozena pro pružný stav, tzn. pro případy, kdy hodnota napětí nepřekročí mez úměrnosti použitého materiálu

$$\sigma < \sigma_u \quad (6.4)$$

Pokud tato podmínka není splněna, provádí se kontrola stability podle Tetmajera.

### 6.1.2 Kontrola stability podle Tetmajera

Kritická síla podle Tetmajera počítá [7]:

$$F_{Kr} = S(a - b\lambda) \quad (6.5)$$

Materiálové konstanty  $a$ ,  $b$  jsou zjištěné na základě zkoušek a jsou udávány v jednotkách MPa.

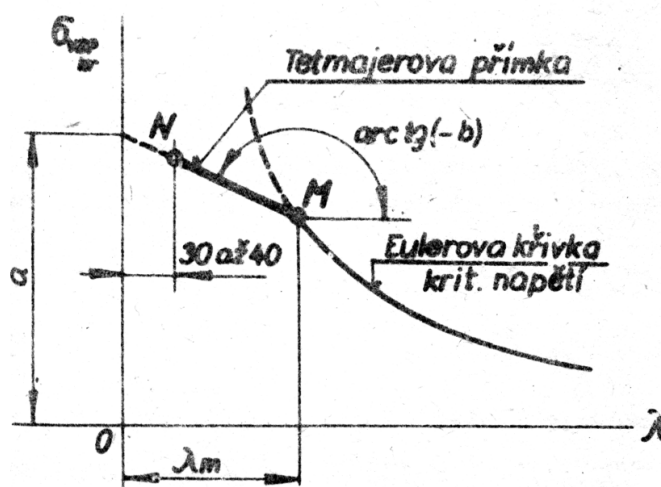
Štíhlost prutu

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{S}}} \quad (6.6)$$

Mezní štíhlost prutu

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{\beta \cdot \pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} \quad (6.7)$$

Na základě zkoušek bylo potvrzeno, že v oblasti štíhlostí menších než  $\lambda_m$  lze Eulerovu křivku nahradit přímkou. [7]



Obr. 6.1.2 Křivka kritických vzpěrných napětí [7]

Na obr. 6.1.2 je naznačena spodní mez platnosti výpočtu dle Tetmajera pro štíhlost  $\lambda = 30 \div 40$ . Pro nižší hodnoty štíhlosti než je tato mez lze počítat pruty pro tlak, protože napětí u nich mohou již dosahovat meze kluzu, případně dokonce meze pevnosti. Proto takové pruty neztrácejí svojí únosnost vlivem ztráty stability tvaru, ale vlivem porušení tlakem. [7]

## 6.2 Koeficient změny hodnoty násobitele zatížení

### Násobitel zatížení (Load multiplier)

Vynásobením zatěžující síly  $F_{cv}$  hodnotou násobitele zatížení, získáme kritickou sílu, při které konstrukce ztrácí statickou stabilitu.

### Příklad výpočtu kritické síly

Pro analýzu změny hodnoty násobitele zatížení byla zvolena celková zatěžující síla  $F_{cv}=10000\text{N}$ , tzn. síla na jeden styčník  $F_v = 3333\text{N}$ .

Kritická síla, při které ztrácí konstrukce stabilitu tvaru se počítá dle následujícího vztahu pro hodnotu násobitele zatížení  $k_{LM}=133,77$  a zatěžující síle  $F_{cv}=10000\text{N}$ :

$$F_{kr} = k_{LM} \cdot F_{cv} = 133,77 \cdot 10000 = 1337700\text{N} \quad (6.8)$$

### Koeficient změny násobitele zatížení se stanoví dle následujícího vztahu:

$$k_v = \frac{k_{LMf}}{k_{LM0}} \quad (6.9)$$

kde: -  $k_{LMf}$  je hodnota násobitele zatížení na konstrukci s výrobními nepřesnostmi  $f$  na zvoleném styčníku při dané délce  $L$

-  $k_{LM0}$  je referenční hodnota násobitele zatížení, které je vypočteno na ideálně rovné prutové konstrukci na shodném styčníku jako pro  $k_{LMf}$  při stejné délce  $L$

Daný koeficient představuje míru kolikrát je hodnota násobitele zatížení pro konstrukci s výrobními nepřesnostmi v daném styčníku větší/menší než hodnota násobitele zatížení ideálně rovné prutové konstrukce.

Podle vypočtených hodnot byly vytvořeny tab. 6.4.1.1-6.4.2.2 a z nich grafy obr. 6.4.1-6.4.3, v programu Matlab 2010. Tyto grafy pomohou objasnit, zda a o kolik dojde ke změně násobitele zatížení(kritické síly) při různých výrobních a provozních nepřesnostech na modelech s různou délkou  $L$  a při variantách zatížení A, B a C.

## 6.3 Numerické řešení jednotlivých variant modelu

Pro ukázkou je průběh ztráty stability znázorněn pouze pro model s parametry  $L=1500\text{mm}$  při ideálně rovné konstrukci a pro konstrukci s výrobní nepřesností  $f=50\text{mm}$  pro tři varianty zatížení. Varianta zatížení A je znázorněna na obr. 6.3.1 a 6.3.2, varianta zatížení B je znázorněna na obr. 6.3.3 a 6.3.4 a varianta zatížení C je znázorněna na obr. 6.3.5 a 6.3.6.

**B: Linear Buckling**

Figure

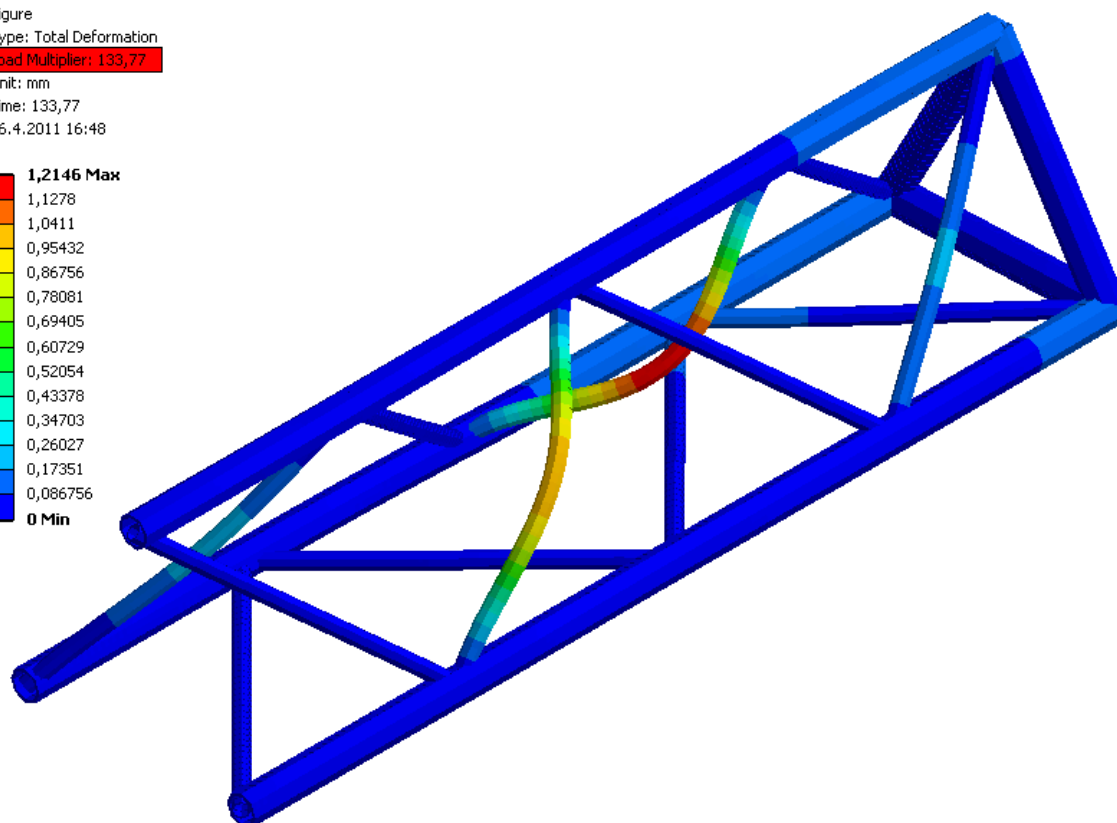
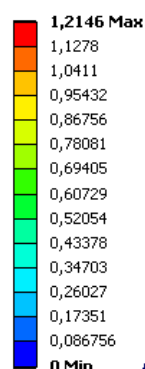
Type: Total Deformation

Load Multiplier: 133,77

Unit: mm

Time: 133,77

26.4.2011 16:48



Obr. 6.3.1 Zatížení varianta A, ideálně rovná konstrukce, L=1500mm

**B: Linear Buckling**

Figure

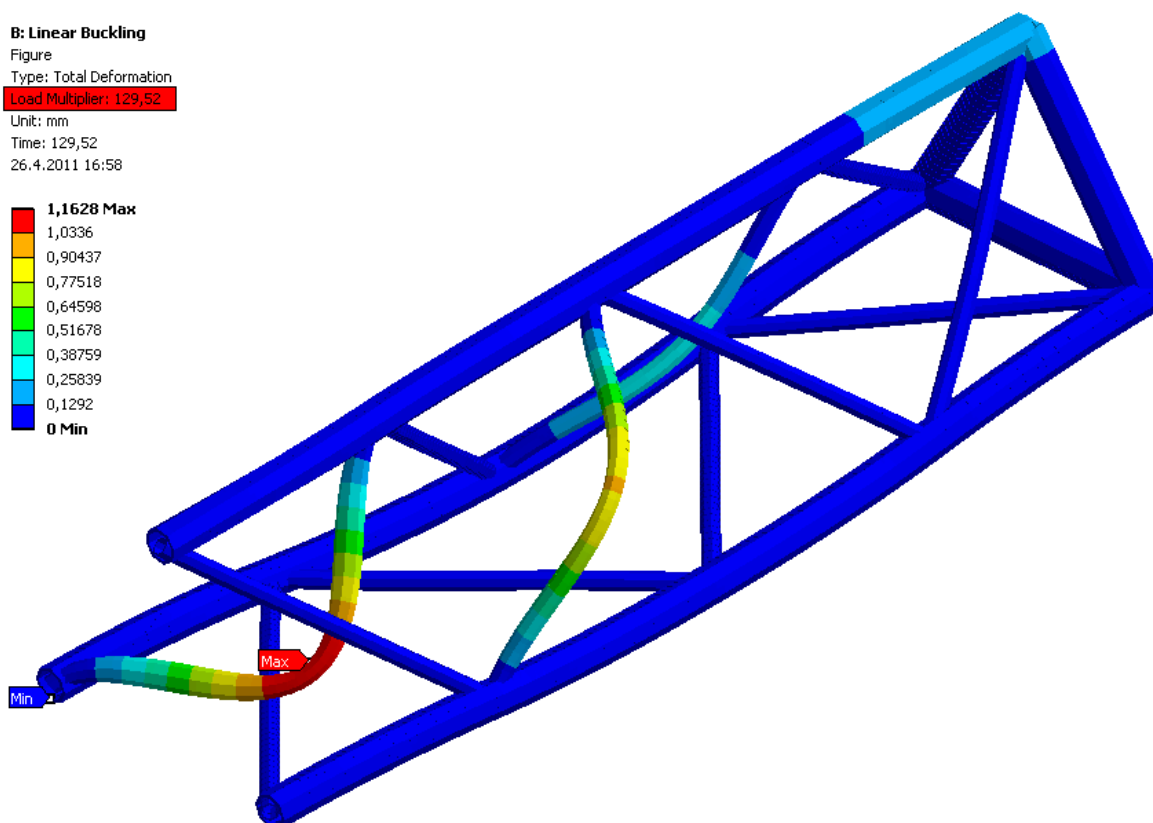
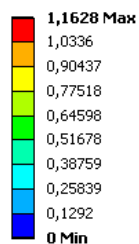
Type: Total Deformation

Load Multiplier: 129,52

Unit: mm

Time: 129,52

26.4.2011 16:58



Obr. 6.3.2 Zatížení varianta A, výrobní nepřesnosti f=50mm, L=1500mm

**B: Linear Buckling**

Figure

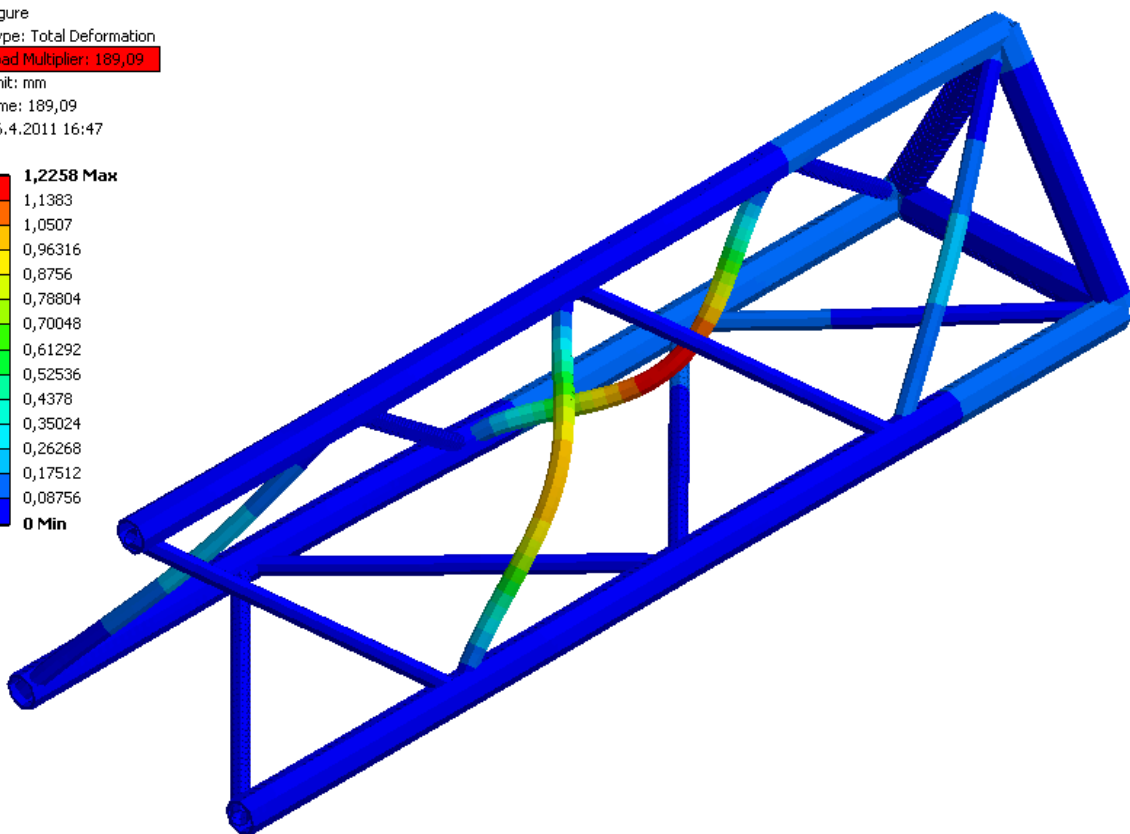
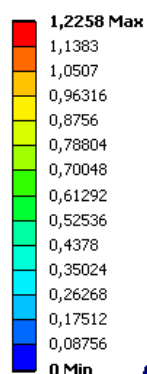
Type: Total Deformation

Load Multiplier: 189,09

Unit: mm

Time: 189,09

26.4.2011 16:47



Obr. 6.3.3 Zatížení varianta A, ideálně rovná konstrukce,  $L=1500\text{mm}$

**B: Linear Buckling**

Figure

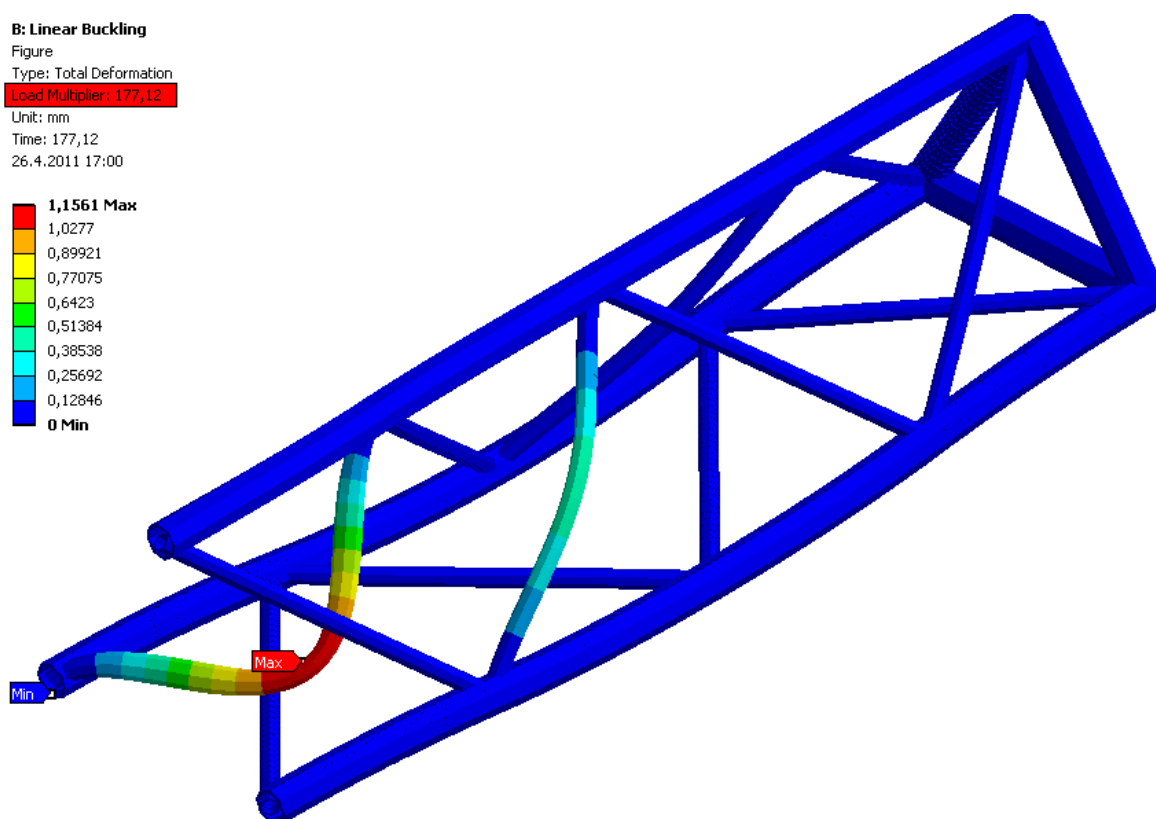
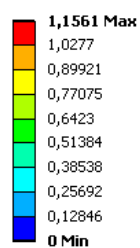
Type: Total Deformation

Load Multiplier: 177,12

Unit: mm

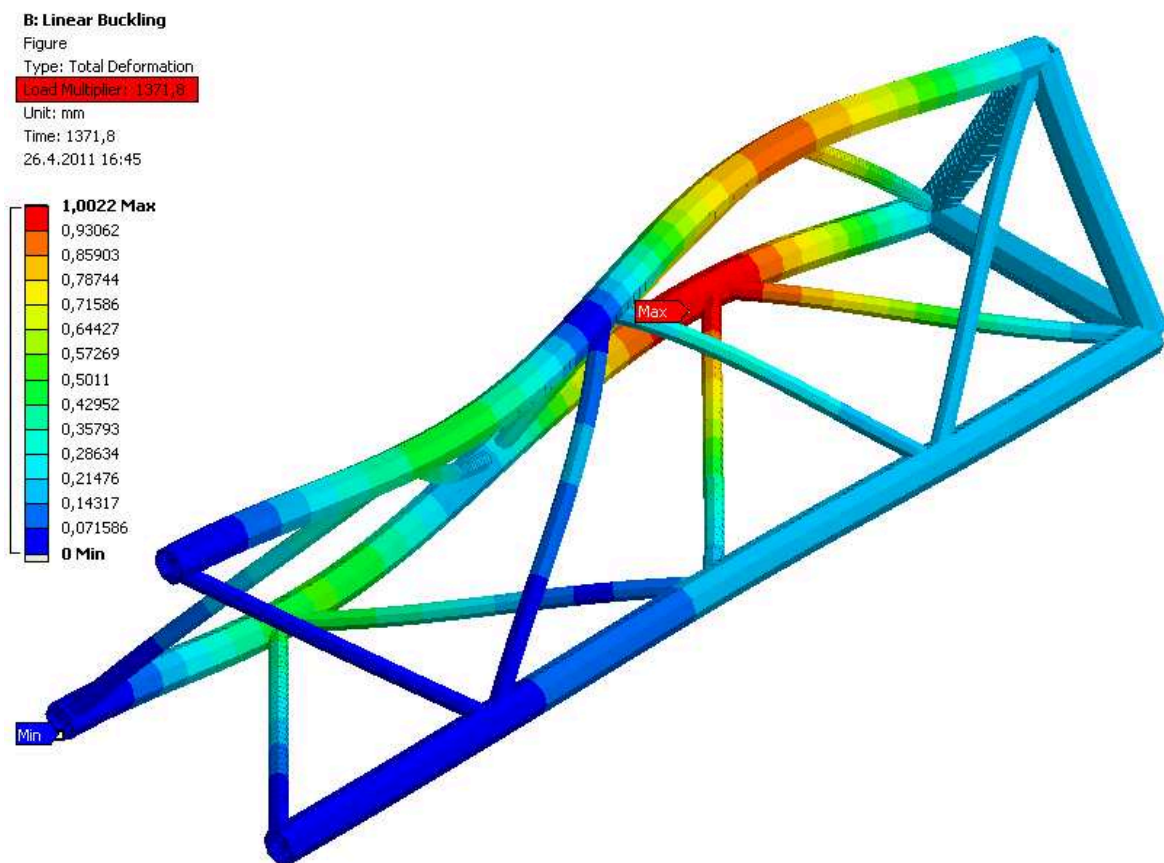
Time: 177,12

26.4.2011 17:00

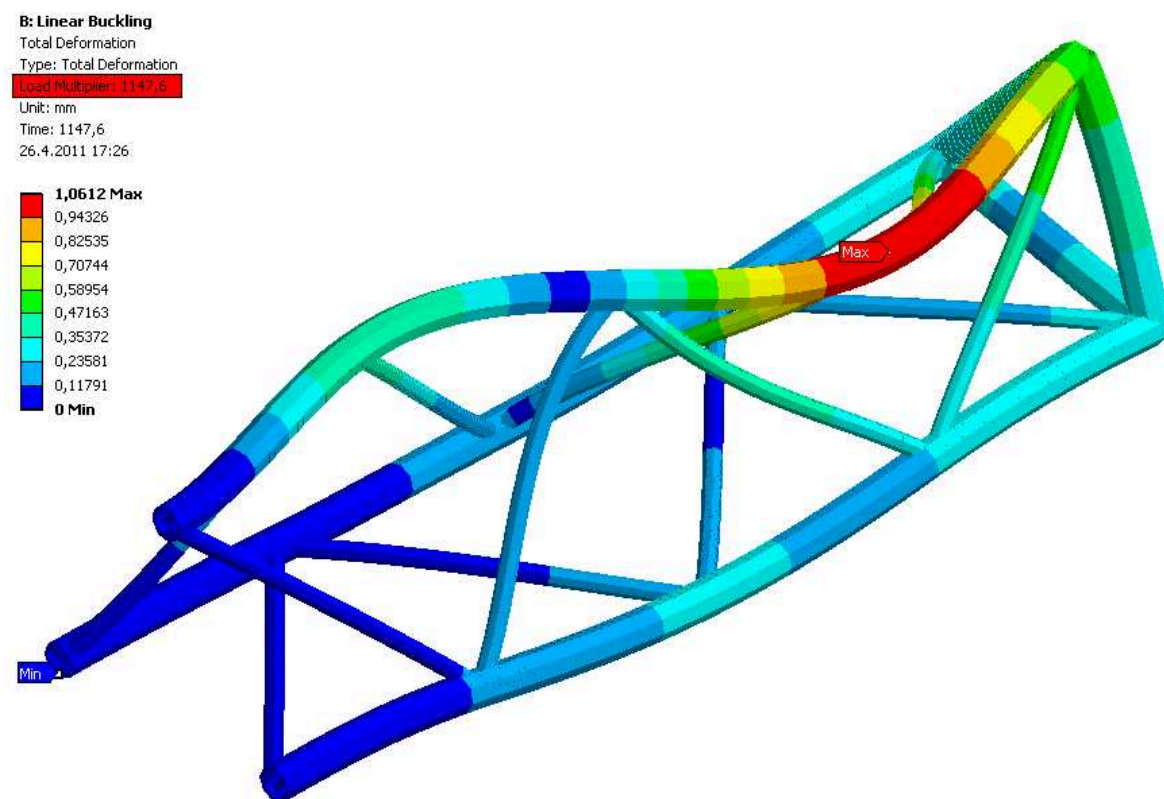


Obr. 6.3.4 Zatížení varianta B, výrobní nepřesnosti  $f=50\text{mm}$ ,  $L=1500\text{mm}$





Obr. 6.3.5 Zatížení varianta C, ideálně rovná konstrukce, L=1500mm



Obr. 6.3.6 Zatížení varianta C, výrobní nepřesnosti  $f=50\text{mm}$ , L=1500mm

## 6.4 Grafy koeficientů změny násobitele zatížení

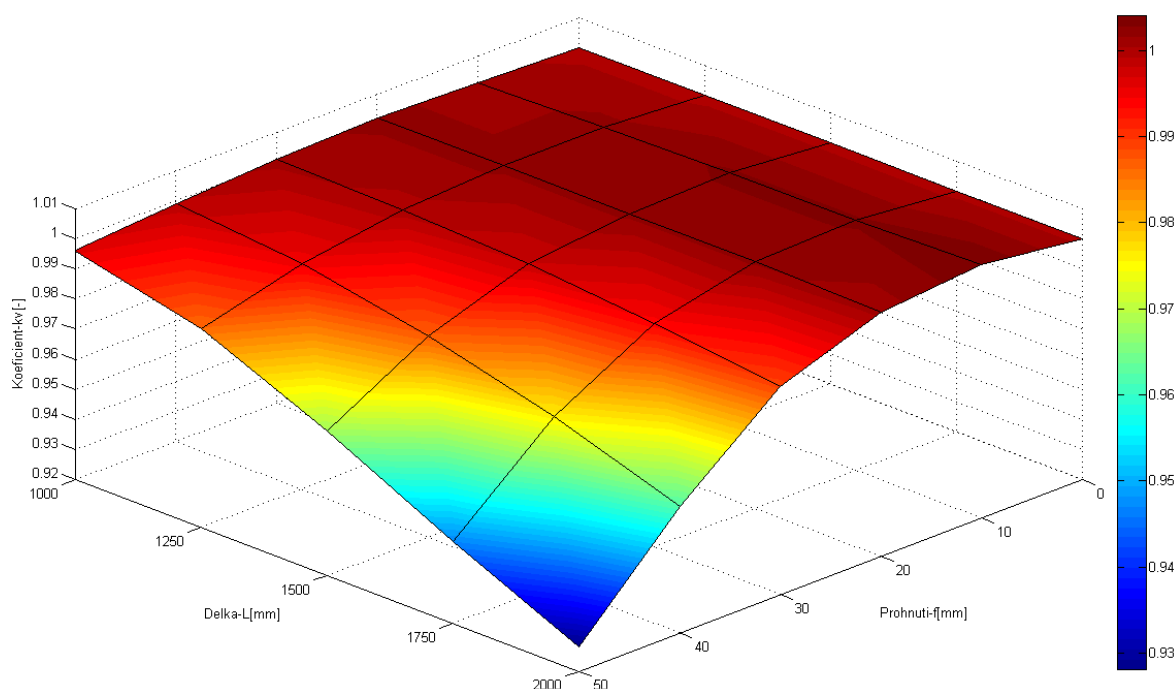
### 6.4.1 Analýza konstrukce při zatížení varianta A

Tab. 6.4.1.1 Tabulka vypočtených hodnot

Násobitel zatížení při variantě zatížení A						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	216,34	170,31	133,77	105,28	83,32
	10	216,59	170,66	134,13	105,62	83,62
	20	216,69	170,69	134,06	105,45	83,37
	30	216,59	170,32	133,45	104,64	82,40
	40	216,22	169,48	132,08	102,73	80,18
	50	215,52	167,97	129,52	99,68	77,31

Tab. 6.4.1.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny násobitele zatížení při variantě zatížení A						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	1,001	1,002	1,003	1,003	1,004
	20	1,002	1,002	1,002	1,002	1,001
	30	1,001	1,000	0,998	0,994	0,989
	40	0,999	0,995	0,987	0,976	0,962
	50	0,996	0,986	0,968	0,947	0,928



Obr. 6.4.1 Graf změny koeficientu násobitele zatížení

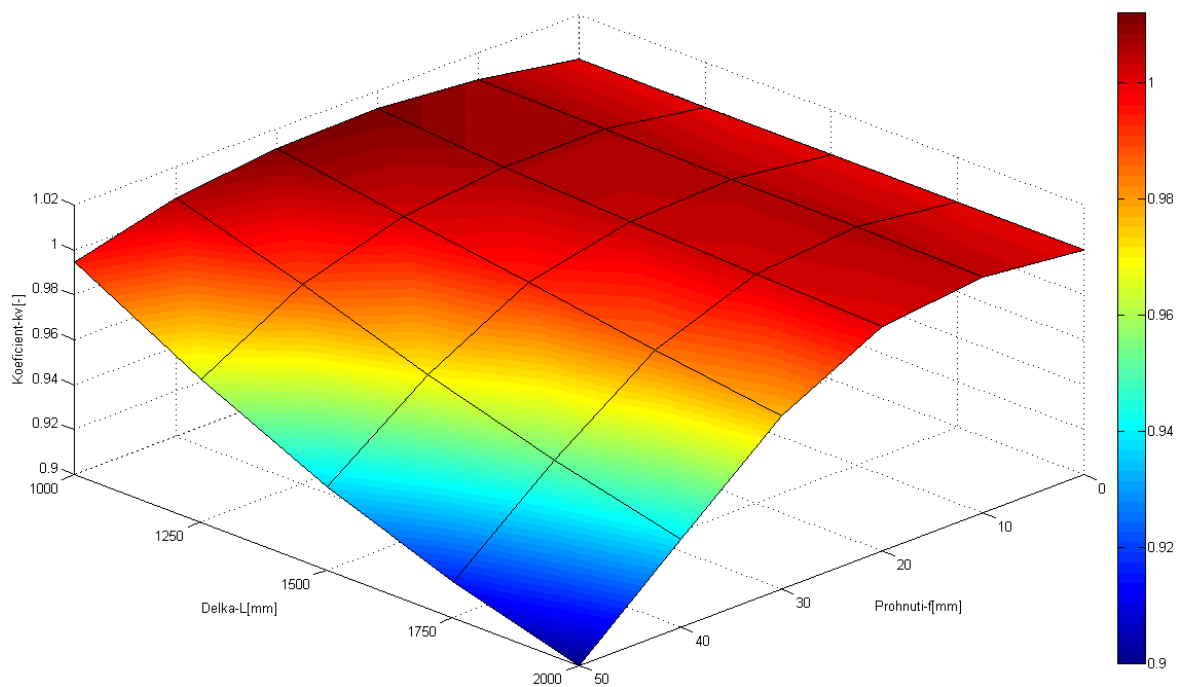
## 6.4.2 Analýza konstrukce při zatížení varianta B

Tab. 6.4.2.1 Tabulka vypočtených hodnot

Násobitel zatížení při variantě zatížení B						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	305,90	240,80	189,09	148,76	117,66
	10	308,37	242,39	190,20	149,58	118,28
	20	309,48	242,57	189,91	149,03	117,61
	30	309,24	241,32	187,96	146,60	114,96
	40	307,68	238,05	183,37	141,74	110,49
	50	304,41	232,12	177,12	136,24	105,89

Tab. 6.4.2.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny násobitele zatížení při variantě zatížení B						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	1,008	1,007	1,006	1,006	1,005
	20	1,012	1,007	1,004	1,002	1,000
	30	1,011	1,002	0,994	0,985	0,977
	40	1,006	0,989	0,970	0,953	0,939
	50	0,995	0,964	0,937	0,916	0,900



Obr. 6.4.2 Graf změny koeficientu násobitele zatížení

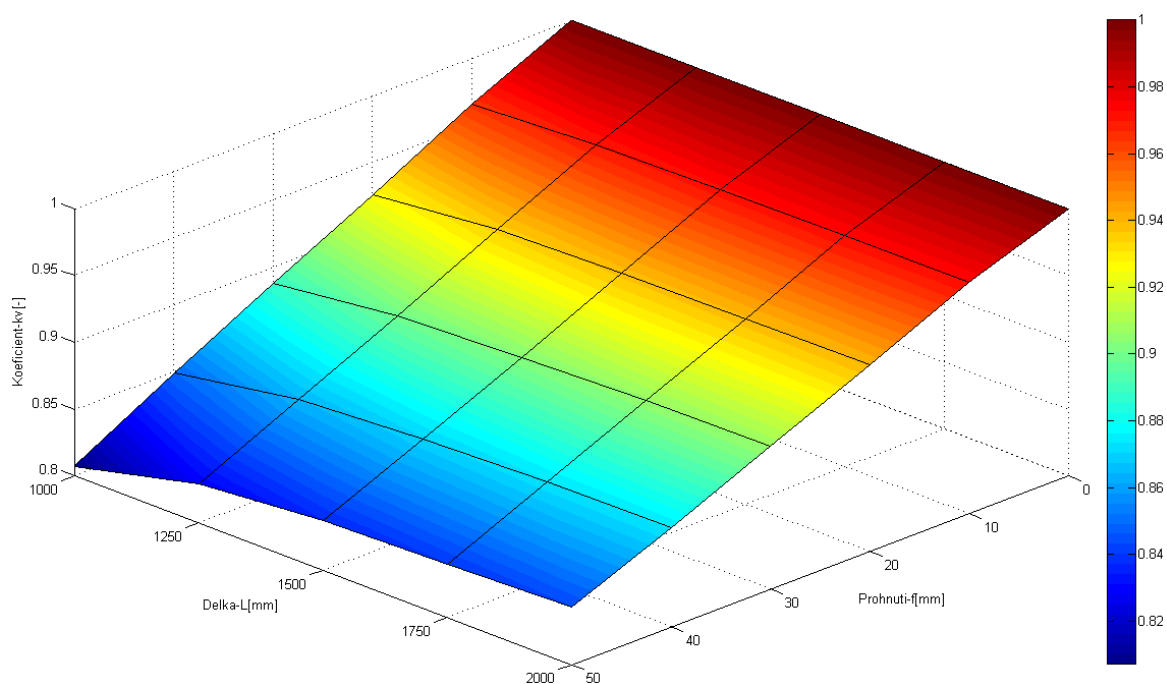
### 6.4.3 Analýza konstrukce při zatížení varianta C

Tab. 6.4.3.1 Tabulka vypočtených hodnot

Násobitel zatížení při variantě zatížení C						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	Ideálně rovná	2704,80	1874,10	1371,80	1047,10	825,43
	10	2610,60	1818,78	1333,60	1018,70	803,35
	20	2505,27	1751,73	1286,60	983,74	776,27
	30	2401,08	1684,80	1239,20	948,31	748,72
	40	2296,02	1619,25	1193,00	913,70	721,77
	50	2182,62	1553,61	1147,60	879,86	695,44

Tab. 6.4.3.2 Tabulka vypočtených hodnot

Koeficient změny násobitele zatížení při variantě zatížení C						
		Délka L [mm]				
		1000	1250	1500	1750	2000
Průhyb f [mm]	10	0,965	0,970	0,972	0,973	0,973
	20	0,926	0,935	0,938	0,939	0,940
	30	0,888	0,899	0,903	0,906	0,907
	40	0,849	0,864	0,870	0,873	0,874
	50	0,807	0,829	0,837	0,840	0,843



Obr. 6.4.3 Graf změny koeficientu násobitele zatížení

## 6.5 Hodnocení vlivu jednotlivých parametrů na násobitele zatížení

**Délka  $L$**  – při namáhání konstrukce tlakovou silou nemá tento parametr příliš velký vliv na změnu násobitele zatížení. Naopak tomu je u namáhání konstrukce ohybem, kdy platí pravidlo, že čím větší parametr  $L$  tím menší kritická síla je zapotřebí k ztrátě stability tvaru.

**Výrobní nepřesnosti  $f$**  – násobitel zatížení se vlivem výrobní nepřesnosti zmenšuje. To má za následek menší kritickou sílu, při které dojde k ztrátě stability tvaru, a menší únosnost konstrukce. Výrobní nepřesnost má vliv na stabilitu a dokáže zmenšit kritickou sílu až 0,807x.

## 7 Závěrečné zhodnocení

Použití prutových konstrukcí je velmi výhodné a používané vzhledem k nízké hmotnosti a vysokému využití mechanických vlastností materiálu. Je tedy potřeba věnovat se u těchto konstrukcí výrobním nepřesnostem, které mají vliv na chování a pevnost konstrukce.

Možný vliv výrobních nepřesností byl zkoumán na zadaném konečnoprvkovém modelu prutové konstrukce vytvořeném v programu Ansys Workbench 13 včetně zadaných okrajových podmínek. Analýza byla prováděna na modelu složeného ze tří hlavních prutů spojených výztuhou.

Výrobní nepřesnosti byly aplikovány na dva hlavní pruty v rovnoběžných rovinách v stejném směru. Změnou výrobních nepřesností a délky byly na konstrukcích vypočteny napětí a násobitele zatížení pro 30 kombinací těchto parametrů u různého způsobu zatížení. Pro snadnější srozumitelnost dané problematiky byl zaveden koeficient změny napětí, který představuje míru kolikrát je napětí vyšší/nížší než referenční napětí vypočtené na ideálně rovné konstrukci.

Vzhledem k štíhlosti prutů bylo nutné provést také vliv výrobních nepřesností na ztrátu stability tvaru konstrukce. Podobně jako u analýzy změny napětí byl zaveden koeficient změny násobitele zatížení, který představuje míru kolikrát je násobitel zatížení vyšší/menší než referenční hodnota násobitele zatížení na ideálně rovné konstrukci.

Lepší přehlednost výsledků byla dosažena vytvořením grafů závislosti délky  $L$  a výrobních nepřesností  $f$  na koeficientu změny napětí a koeficientu změny násobitele zatížení. Z uvedených grafů vyplývá, že výrobní nepřesnosti u zadaných prutových konstrukcí s různým parametrem  $L$  způsobují nárůst napětí a pokles násobitele zatížení. Tato změna ovlivní chování celé konstrukce, a proto je nutné věnovat této problematice více pozornosti. Pokud definujeme výrobní nepřesnosti prutů v jiných rovinách než rovnoběžných nebo aplikujeme kombinace různých velikostí výrobních nepřesností na jednotlivých prutech, tak je předpoklad, že také dojde k změně chování celé konstrukce.

## **Final evaluation**

Using truss construction is very profitable and used with regard to low weight and high utilization mechanical properties. These construction needs devote manufacturing imperfection, which have influence to behaviour and strength of construction.

The possible influence of manufacturing imperfection was examined on finite elements model of design truss construction by Ansys Workbench 13 platform with set boundary conditions. The analysis was made on model composited of free main truss linked by reinforcement.

Manufacturing imperfection has been applied on two main truss in parallel plane in the same direction. Changing the manufacturing imperfection and lengths were calculated stress and load multiplier for 30 combinations these parameters on construction for different modes of loading. For easier understanding the problem was the coefficient of changing stress, which is a measure how much is stress higher/lower than stress on ideal straight truss construction.

Influence of manufacturing imperfection on loss steadiness of shape was necessary with regard to slimness of truss. Analogous to analysis changing stress is the coefficient of changing load multiplier, which is a measure how much is load multiplier higher/lower than load multiplier on ideal straight truss construction.

Better lucidity of the results was achieved by creating graph of length  $L$  and manufacturing imperfection at coefficient of changing stress and coefficient of changing load multiplier. These graphs confirm influence of manufacturing imperfection increase the stress and decrease the load multiplier of truss construction with varying parameter  $L$ . This change influenced behaviour of all construction, and therefore it is necessary to take more attention on this problem. If we define manufacturing imperfection truss in other planes than parallel or apply a combination of different size of manufacturing imperfection, so the theory is, that will change the behaviour of construction.



## 8 Seznam použité literatury

- [1] SLAVĚTÍNSKÝ, Dušan. Příhradové konstrukce. *Stavba letadel* [online]. 25.4.2010, Vyd. 1., [cit. 2011-05-05]. Dostupný z WWW: <[http://www.slavetind.cz/stavba/St\\_mechanika/Prihradovekonstrukce.aspx](http://www.slavetind.cz/stavba/St_mechanika/Prihradovekonstrukce.aspx)>.
- [2] HALAMA, Radim. *Úvod do MKP* [online], Elektronická prezentace, VŠB-TU Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2009 - [cit. 2011-05-08]. Dostupný z WWW: <<http://www.339.vsb.cz/PDF/UvodDoMKP.pdf>>.
- [3] LENERT, J. *Úvod do metody konečných prvků*. Vyd. 1. Ostrava: Vysoká škola báňská, 1999. 110 s. ISBN 80–7078-686–8.
- [4] KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. *FEM: Principy a praxe metody konečných prvků*. 1. vyd. Praha: Computer Press, 1997. 401 s. ISBN 80–7226-021–9.
- [5] ZAJÍČEK, Martin; ADÁMEK, Vítězslav. Křivé a lomené pruty : Shrnutí a základní poznatky. In *Podpůrné materiály pro studium předmětu Pružnost a pevnost 2* [online]. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2009 [cit. 2011-05-10]. Dostupné z WWW: <<http://www.kme.zcu.cz/kmet/pp2/krive-a-lomene-pruty/>>.
- [6] Prospekty poskytnuté firmou Huisman
- [7] KUBA, F. *Pružnost a pevnost (základní část) přepracované vydání*. Vyd. 3. Ostrava: Vysoká škola báňská, 1982. 385 s.
- [8] LENERT, J. *Pružnost a pevnost II*. Vyd. 1. Ostrava: Vysoká škola báňská, 2000. 174 s. ISBN 80–7078-572–1.
- [9] ANSYS, Inc. *ANSYS Release 11 Documentation*. SAP IP, Inc., 2007. V elektronické podobě dostupné jako součást instalace programu ANSYS 11.

## **9 Seznam příloh**

A. Tabulky a grafy z analýzy změny napětí (18 stran)

B. CD – ROM

## **10 Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce **Ing. Zdeňku Porubovi, Ph.D.** za jeho čas strávený při konzultacích, cenné rady a připomínky při tvorbě této práce.